30. *Bemerkungen über die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung*

Von Kenjiro SHODA, M.J.A.

(Comm. March 12, 1955)

In einer früheren Arbeit[1] haben wir die Theorie der algebraischen Erweiterungen eines algebraischen Systems studiert und den folgenden Satz bewiesen. Beschränken wir uns auf die Systeme mit den Grundvoraussetzungen, die wir bis jetzt[2] in der Untersuchungen der algebraischen Systeme stets angenommen haben, sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend für die Existenz der algebraisch abgeschlossenen (algebraischen) Erweiterung Ω eines algebraischen Systems $\mathfrak{A}$:

a) Ist $\mathfrak{A}'$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}'$, so ist $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}$.

b) Ist α ein algebraisches Element über $\mathfrak{A}$, so ist das durch Adjunktion von α entstehende System $\mathfrak{A}(\alpha)$ algebraisch über $\mathfrak{A}$.

c) Jedes Polynom von $\mathfrak{A}'(x)$ für eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ besitzt ein Zerfällungssystem.

Dabei versteht man unter einem Zerfällungssystem eines Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ derart, dass jede Wurzel von $f(x)$ in einer $\mathfrak{Z}$ enthaltenden algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{A}$ schon in $\mathfrak{Z}$ enthalten ist.

Die Bedingung c) kann man, wie man im Beweis des Satzes leicht einsehen kann, durch die folgenden ersetzen.

c$'$) Jedes Polynom von $\mathfrak{A}'(x)$, die eine Erweiterung eines irreduziblen Polynoms von $\mathfrak{A}(x)$ ist, besitzt ein Zerfällungssystem.

Sind die Untersysteme der vorkommenden Systeme stets normal, so gelten die Bedingungen a), b), wie wir in A. E. bewiesen haben. In der vorliegenden Note beweisen wir c$'$). Dann erkennt man die Richtigkeit von c) und die von dem folgenden Satz.

Satz. *Jedes Untersystem sei normal. Dann besitzt ein System stets eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung.*

Es sei x ein transzendentes Element über $\mathfrak{A}$. Bezeichnet man das durch x erzeugte freie System mit $\mathfrak{X}$, so ist $\mathfrak{A}(x)=\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$. Der Kern eines Polynoms $f(x)$, aufgefasst als eine Kongruenz von $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$, ist ein Untersystem $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{F}=0$. Daher wird $\mathfrak{F}$ durch eine

1) K. Shoda: Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, Osaka Math. J., **4**, 133-143 (1952), zitiert mit A. E. Diese Note soll als bekannt angenommen werden.

2) K. Shoda: Über die allgemeinen algebraischen Systeme, I–VIII, Proc. Imp. Acad., **17–20** (1941–1944); Allgemeine Algebra, Osaka Math. J., **1**, 182–225 (1949).

homomorphe Abbildung eines Untersystems $\mathfrak{F}_x$ von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{A}$ bestimmt, so dass $\mathfrak{F}$ aus den (a, y) mit den zugeordneten $a \in \mathfrak{A}$, und $y \in \mathfrak{F}_x$ besteht. Dies folgt leicht aus der Grundvoraussetzung, dass jede Meromorphismus (mehr-mehrdeutiger Isomorphismus) einen Isomorphismus eines Restklassensystems eines Systems auf ein Restklassensystem eines anderen induziert.

Wir beweisen zunächst

Hilfssatz. *Jedes Untersystem sei normal. Sind α, β Wurzeln eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$, die in einer algebraischen Erweiterung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ enthalten sind, so ist $\mathfrak{A}(\alpha)=\mathfrak{A}(\beta)$.*

Beweis. Setzt man $\mathfrak{A}(\alpha)=\mathfrak{A}_\alpha$, so ist $\mathfrak{A}(\alpha, \beta)=\mathfrak{A}_\alpha(\beta)\subseteq\mathfrak{Z}$. Da auf der anderen Seite $\mathfrak{A}_\alpha$ zu $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{X})/\mathfrak{F}$ isomorph nach der Abbildung $\alpha\to\bar{x}$ ist, wobei x die x enthaltende Restklasse aus $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{X})/\mathfrak{F}$ bedeutet, so induziert $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{X})/\mathfrak{F}$ die Kongruenzrelationen von der Form $b\equiv y$ mit $b\in\mathfrak{A}$, $y\in\mathfrak{F}_x$. Dabei tritt jedes Element y aus $\mathfrak{F}_x$ auf. Denn $\mathfrak{A}\smile\mathfrak{F}$ ist, wie man sich leicht überzeugt, gleich $\mathfrak{A}\times\mathfrak{F}_x$ und jedes Element aus $\mathfrak{A}\smile\mathfrak{F}$, also jedes Element aus $\mathfrak{F}_x$ mit einem Element aus $\mathfrak{A}$ kongruent modulo $\mathfrak{F}$. Ist umgekehrt $b\equiv y$, so ist $y\in\mathfrak{A}\smile\mathfrak{F}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{F}$, also $y\in\mathfrak{F}_x$. Die Gesamtheit solcher Kongruenzrelationen definieren dann eine Kongruenz von $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$, die eine Verfeinerung der vorgegebenen Kongruenz modulo $\mathfrak{F}$ ist. Also bestimmt sie ein Restklassensystem $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{X})/\mathfrak{F}'$ mit $\mathfrak{F}'\subseteq\mathfrak{F}$. Da aber $\mathfrak{F}'_x=\mathfrak{F}_x$ sein muss, so ist $\mathfrak{F}'=\mathfrak{F}$. Ist nun y, als ein Element aus $\mathfrak{X}$ durch $s(x)$ dargestellt, so ist $s(\alpha)=b$, da aus der Abbildung $\alpha\to\bar{x}$ die Abbildung $s(\alpha)\to s(\bar{x})=\overline{s(x)}=\bar{y}=\bar{b}$ folgt. Man erkennt nun leicht, dass die Abbildung $x\to\alpha$ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{A}_\alpha$ nach sich zieht, die eine Erweiterung der Abbildung $y\to b$ von $\mathfrak{F}_x$ in $\mathfrak{A}$ ist.

Für eine Wurzel β von $f(x)$ ist $\mathfrak{A}_\alpha(\beta)$ zu $(\mathfrak{A}_\alpha\times\mathfrak{X})/\mathfrak{F}$ homomorph nach der Abbildung $\bar{x}\to\beta$, da $\mathfrak{F}$ nach der Voraussetzung auch normal in $\mathfrak{A}_\alpha\times\mathfrak{X}$ ist. Die Abbildung $y\to b$ von $\mathfrak{F}_x$ in $\mathfrak{A}$ lässt sich nach oben zur Abbildung $x\to\lambda$ von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{A}_\alpha$ erweitern. Die Kongruenzrelationen $x\equiv\lambda$ definieren dann ein Restklassensystem, das zu $\mathfrak{A}_\alpha$ isomorph ist. Daher ist $(\mathfrak{A}_\alpha\times\mathfrak{X})/\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{A}\times\mathfrak{Y}$ isomorph (mit einem zu $\mathfrak{X}/\mathfrak{F}_x$ isomorphen System $\mathfrak{Y}$). Daher ist $\mathfrak{A}_\alpha(\beta)$ zu $\mathfrak{A}_\alpha\times\mathfrak{Y}'$ mit einem zu $\mathfrak{Y}$ homomorphen $\mathfrak{Y}'$ isomorph, da der Kern der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{A}_\alpha\times\mathfrak{Y}$ auf $\mathfrak{A}_\alpha(\beta)$ sicher in $\mathfrak{Y}$ enthalten ist. Da aber β algebraisch über $\mathfrak{A}_\alpha$ ist, so ist $\mathfrak{Y}'=0$, also $\mathfrak{A}_\alpha(\beta)=\mathfrak{A}_\alpha$, $\beta\in\mathfrak{A}$. Daher ist $\mathfrak{A}(\alpha)\supseteq\mathfrak{A}(\beta)$ und folglich $\mathfrak{A}(\alpha)=\mathfrak{A}(\beta)$.

Beweis des Satzes. Wir beweisen nun die Bedingung c′). Es sei $\mathfrak{A}'$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ und $f'(x)$ ein Polynom von $\mathfrak{A}'(x)$, die eine Erweiterung eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ ist. Sind α, β zwei Wurzeln von $f'(x)$ in einer algebraischen Erweiterung $\mathfrak{Z}'$ von $\mathfrak{A}'$, so ist $\mathfrak{Z}'$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und α, β sind nach A. E. Wurzeln des irreduziblen Polynoms $f(x)$. Daher ist nach dem Hilfssatz $\mathfrak{A}(\alpha)=\mathfrak{A}(\beta)$ und folglich $\mathfrak{A}'(\alpha)=\mathfrak{A}'(\beta)$. Daher ist $\mathfrak{A}'(\alpha)$ ein Zerfällungssystem von $f'(x)$, womit die Bedingung c$'$) und folglich der Satz bewiesen ist.