# 45. Sur les Polygones Caractêristiques et le Procêdê de Rêduction au Point Singulier Fixe $\xi$ d'une Équation Diffêrentielle Ordinaire du Premier Ordre

Par Masuo HUKUHARA
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., April 12, 1955)

1. Soit 0 un point singulier fixe $\xi$ d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre dont le second membre est une fonction rationnelle de la fonction inconnue. Nous pouvons alors écrire

$$x^{\sigma+1}dy/dx=P(x, y)/Q(x, y) \qquad (\sigma\geqq 0); \tag{1}$$

$\sigma$ est un nombre rationnel, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynomes de $y$ sans facteurs communs:

$$P(x, y)=a_0(x)+a_1(x)y+\cdots+a_r(x)y^r,$$
$$Q(x, y)=b_1(x)+b_2(x)y+\cdots+b_{r-1}(x)y^{r-2},$$

les coefficients $a_j(x)$ et $b_k(x)$ sont des fonctions régulières en 0 d'une certaine puissance fractionnaire positive de $x$, chacun des polynomes $P(0, y)$, $Q(0, y)$ ne s'annule pas identiquement, l'une au moins des coefficients $a_0(x)$ et $b_1(x)$ ne s'annule pas identiquement et enfin l'une au moins des coefficients $a_r(x)$ et $b_{r-1}(x)$ ne s'annule pas identiquement. Supposons que les développements de $a_j(x)$ et de $b_k(x)$ commencent respectivement par les termes de degrés $m_j$ et $n_k$. Si $a_j(x)$ s'annule identiquement, nous poserons $m_j=\infty$. De même, $n_k=\infty$ signifie que $b_k(x)$ s'annule identiquement.

2. Prenons dans un plan deux axes $OX$ et $OY$ que nous ne supposons pas orthogonaux. Marquons dans ce plan les points $P_j(j, m_j)$ et les points $Q_k(k, n_k+\sigma)$. Marquons aussi les points $R_j(j, l_j)$ dont les ordonnées $l_j$ sont définis par

$$l_j=\min\{m_j, n_j+\sigma\}$$

pour $k=1, 2, \ldots, r-1$, et $l_0$ et $l_r$ sont égaux respectivement à $m_0$ et à $m_r$. Soit $\Pi$ le polygone convexe vers le bas et tel que les sommets sont les points $R_j$ et que les autres points $R_j$ se trouvent au-dessus de $\Pi$ ou sur les côtés de $\Pi$. Construisons aussi le polygone analogue $\Pi'$ relatif aux points $Q_k$. Nous les appellerons respectivement polygones caractéristiques principale et auxiliaire.

Nous pouvons les partager respectivement en trois parties: les parties centrale, droite et gauche. La partie centrale de $\Pi$, par exemple, est le côté ou le sommet de $\Pi$ situé sur l'axe $OX$. J'ai déjà remarqué les propriétés suivantes.[1]

1) "Kansū-hōteisiki" (Equations Fonctionnelles), N$^{os}$ 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17 (1938-40); "Ōyō Sūgaku" (Mathématiques Appliquées), **1**, 46-90 (1945).

1° *Les parties droites de* $\Pi$ *et de* $\Pi'$ *sont invariantes par rapport à la transformation* $y=z+c$.

2° *Les polygones caractéristiques de la transformée en* $z=x^{-\rho}y$ *restent invariables; il suffit seulement de prendre pour l'axe OX la droite* $y+\rho x=\alpha$, *où* $\alpha$ *est une certaine constante.*

3° *Les polygones caractéristiques de la transformée en* $z=1/y$ *restent invariables; il suffit seulement de prendre pour l'axe OY la droite* $x=r$ *et de changer le sens de l'axe OX.*

3. Nous appellerons ordre caractéristique principal (auxiliaire) le coefficient angulaire changé de signe d'un côté du polygone caractéristique principal (auxiliaire). Soient $\rho_1, \rho_2, \dots$ tous les ordres caracteristique finis rangés en ordre décroissant.

Nous voulons déterminer les formes standardes pour étudier l'équation (1) dans une région

$$|x|\leqq\delta,\ \frac{1}{\varepsilon}|x|^{\rho_{k-1}}\leqq|y|\leqq\varepsilon|x|^{\rho_k}, \tag{2}$$

où $\delta$ et $\varepsilon$ désignent des nombres positifs assez petits. Nous l'appellerons région de la première sorte. Dans le cas particulier où $k=1$, on doit remplacer (2) par $|x|\leqq\delta$, $|y|\leqq\varepsilon|x|^{\rho_k}$. D'après la proposition 2°, nous supposerons $\rho_k=0$ sans perdre la généralité.

4. Considérons d'abord le cas de $k=1$. Si $m_0=\infty$, l'équation (1) prend l'une des deux formes[2)]

$$xy'=yf(x, y),$$
$$x^{\sigma+1}y'=yf(x, y) \qquad (\sigma>0, f(0, 0)\neq 0),$$

suivant que $Q_1$ coïncide ou non avec $R_1$. Elles sont des cas particuliers des équations

$$xy'=f(x, y) \qquad (f(0, 0)=0), \tag{A}$$
$$x^{\sigma+1}y'=f(x, y) \qquad (\sigma>0, f(0, 0)=0, f'_y(0, 0)\neq 0), \tag{B}$$

sur lesquelles on sait beaucoup de travaux de divers savants.

Si $m_0<\infty$, l'équation (1) prend la forme

$$x^{\sigma+1}y^{\kappa}y'=f(x, y) \qquad (\sigma\geqq 0, \kappa\geqq 0, f(0, 0)\neq 0); \tag{C}$$

$\kappa$ est positif ou nul suivant que $n_1=\infty$ ou $n_1<\infty$.

Dans le cas de $k>1$, nous posons $\rho_{k-1}=\rho$, $\rho_k=0$. Si l'extrémité gauche de la partie centrale de $\Pi$ est un point $Q_h$, l'équation (1) prend la forme

$$xy'=yf(x, y, x^{\rho}/y). \tag{D}$$

Si en particulier $h=1$, nous retrouvons la forme (A). Si l'extrémité gauche de la partie centrale de $\Pi$ n'est pas un point $Q_h$, nous trouvons l'une des formes

$$xy^{\kappa}y'=f(x, y, x^{\rho}/y) \qquad (\kappa\geqq 0, f(0, 0, 0)\neq 0), \tag{E}$$
$$x^{\sigma+1}y'=y^{\kappa+1}f(x, y, x^{\rho}/y) \qquad (\sigma>0, f(0, 0, 0)\neq 0). \tag{F}$$

---

2) Nous désignerons par $f$ une fonction holomorphe dans le voisinage des valeurs 0 d'une certaine puissance fractionnaire positive de $x$ et des autres arguments.

**5.** Pour connaître le comportement de la solution dans une région de la première sorte, il suffit que l'on étudie ces six formes énumérées plus haut. Pour élucider le comportement de la solution dans les régions complémentaires aux régions de la première sorte:

$$(3) \qquad |x| \leqq \delta, \quad \varepsilon |x|^{\rho_k} \leqq |y| \leqq \frac{1}{\varepsilon} |x|^{\rho_k},$$

nous supposons encore $\rho_k = 0$ et nous désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ les racines non nulles de l'équation $P(0, y) = 0$ et par $\beta_1, \beta_2, \dots$ les racines non nulles de l'équation $Q(0, y) = 0$.

Nous appellerons région de la deuxième sorte la région définie par

$$(4) \qquad \begin{cases} |x| \leqq \delta, \quad \varepsilon \leqq |y| \leqq 1/\varepsilon, \\ |y-\alpha_1| \geqq \varepsilon, \quad |y-\alpha_2| \geqq \varepsilon, \dots, \\ |y-\beta_1| \geqq \varepsilon, \quad |y-\beta_2| \geqq \varepsilon, \dots . \end{cases}$$

On peut y comparer la solution de (1) avec celle de l'équation

$$x^{\sigma+1} dy/dx = P(0, y)/Q(0, y).$$

Désignons par $\gamma$ l'une quelconque des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ . Pour connaître le comportement de la solution dans la région $|x| \leqq \delta$, $|x-\gamma| \leqq \varepsilon$, il suffit d'étudier le comportement de $z = y - \gamma$ dans la région $|x| \leqq \delta$, $|z| \leqq \varepsilon$. Pour connaître le comportement de $z$ dans les régions de la première sorte, il suffit d'étudier les six formes standardes. Pour étudier le comportement de $z$ dans une région complémentaire qui correspond à un ordre caractéristique positif $\rho$, nous faisons le changement de variables $z = x^\rho y_1$. L'équation en $y_1$:

$$(5) \qquad x^{\sigma_1+1} dy_1/dx = P_1(x, y_1)/Q_1(x, y_1)$$

sera appelée une première réduite de (1). En partant de cette équation, on forme une deuxième réduite et ainsi de suite. J'ai remarqué que ce procédé de réduction nous amène finalement à l'une des formes standardes. Mais il y a, dans les raisonnements, quelques lacunes, que nous allons combler dans la suite.

**6.** Si $\gamma$ est égale à l'une des $\alpha$ et si $\rho$ est un ordre caractéristique principal de l'équation en $z$, nous dirons que (5) est une première réduite principale. Si $\gamma$ est égale à l'une des $\beta$ et si $\rho$ est un ordre caractéristique auxiliaire, nous dirons que (5) est une première réduite auxiliaire.

La différence des abscisses des extrémités de la partie centrale de $\Pi'$ sera appelée le rang auxiliaire de (1). $\rho$ désignant un ordre caractéristique auxiliaire de (1), le rang auxiliaire de l'équation en $z = x^{-\rho} y$ sera appelé le rang de l'ordre auxiliaire $\rho$. Le rang auxiliaire de (1) est évidemment égal à la somme des multiplicités des racines $\beta_1, \beta_2, \dots$ et la multiplicité d'une racine $\beta$ est égale à la somme des rangs des ordres caractéristiques auxiliaires positifs des premières réduites auxiliaires relatives à la racine $\beta$. Le rang auxiliaire est donc égal à la somme des rangs des ordres caractéristiques auxiliaires positifs de toutes les premières réduites auxiliaires. Par suite, il est égal à la somme des rangs des ordres caractéristiques auxiliaires de toutes les $n^{\text{ièmes}}$ réduites auxiliaires. On en conclut que le nombre des $n^{\text{ièmes}}$ réduites auxiliaires est indépendant de $n$ dès que $n$ dépasse un certain entier.

Nous pouvons donc nous placer, sans perdre la généralité, dans l'hypothèse qu'il n'existe qu'une $n^{\text{ième}}$ réduite auxiliaire quel que soit $n$. $Q(x, y)$ prend alors la forme

$$Q(x, y)=(y-\beta(x))^{\kappa}\mathfrak{Q}(x, y) \qquad (\kappa>0,\ (0, \beta)\neq 0)$$

et le changement de variables $z=y-\beta(x)$ nous amène à la forme standarde (C) (où $\kappa>0$).

7. Si $\sigma>0$, la différence des abscisses des extrémités de la partie centrale de $\Pi$ sera appelé le rang principal de (1). Si $\sigma=0$, nous le définissons comme il suit.

Soit $\alpha$ une racine de multiplicité $\mu$ de $P(0, y)=0$. Si elle est une racine de $Q(0, y)=0$, nous désignons par $\nu$ sa multiplicité. min $\{\mu, \nu+1\}$ sera appelé le rang de la racine $\alpha$. La somme des rangs de toutes les racines non nulles de $P(0, y)=0$ sera le rang principal de (1). $\rho$ désignant un ordre caractéristique principal, le rang principal de l'équation en $z=x^{-\rho}y$ sera appelé le rang de l'ordre principal $\rho$. On voit alors sans peine que la somme des rangs des ordres caractéristiques principaux des premières réduites principales de (1) ne surpasse pas le rang principal de (1). On peut en conclure que le nombre des $n^{\text{ièmes}}$ réduites principales de (1) est indépendant de $n$ dès que $n$ dépasse un certain entier. On verra sans peine que les rangs principaux des $n^{\text{ièmes}}$ réduites sont égaux à 1. On verra de plus que les ordres caractéristiques auxiliaires des $n^{\text{ièmes}}$ réduites principales sont tous négatifs dès que $n$ dépasse un certain entier. Car, sinon, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ auraient au moins un facteur commun. Alors chacune des $n^{\text{ièmes}}$ réduites prend l'une des formes (A) et (B).[3]

En somme, nous pouvons énoncer le

**Théorème.** *La forme finale des réduites principales est* (A) *ou* (B) *et celle des réduites auxiliaires est* (C). *Le nombre des réduites principales finales ne surpasse pas* $r$ *et celui des réduites auxiliaires finales est égal à* $r-2$.

3) Pour les démonstrations plus détaillées sur ce sujet, voir mon article qui paraîtra prochainement dans " Sūgaku ", l'organe de la Société Mathématique de Japon.