65. *Fonctions Presque Pêriodiques du Type Spêcial.* IV

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 13, 1955)

Nous avons déjà montré aux §§ 7–8 dans ma Note précédante [III],[1] qu'à toute variété linéaire invariante minimale $\Delta_{\varphi_0}^{\nu}$ de $\mathfrak{A}(G)$, on peut faire correspondre une fonction $\tau_{\varphi_0}^{\nu}(x)\in\Delta_{\varphi_0}^{\nu}$, l'espace hilbertien $H_{\varphi_0}^{\nu}$ et la représentation unitaire composée U_a dans celui-ci. Dans ce qui suit, nous allons décomposer cette représentation U_a et déterminer la forme exacte de décomposition pour plusieurs cas.

§ 8. Pour toute $f\in L^1(G)$, en posant $f_{ij}^{\nu}(x)=\overline{D_{ij}^{\nu}(x)}f(x)$ et $[f_i^{\nu}, g_j^{\nu}]_{\varphi_0}=\sum_{k=1}^{n_\nu}(\dot{f}_{ik}^{\nu}, \dot{g}_{jk}^{\nu})_{\varphi_0}^1$, on a évidemment

$$(8.1)\qquad (\dot{f}, \dot{g})_{\varphi_0}^{\nu}=\frac{1}{n_\nu}\ \mathit{Trace}\ [\boldsymbol{D}^{\nu}(f, g)_{\varphi_0}],$$

où $\boldsymbol{D}^{\nu}(f, g)_{\varphi_0}=\int_G \overline{\varphi_0(x)}\mathfrak{D}^{\nu}(x^{-1})g^*f(x)dx$, c'est-à-dire

$$(8.2)\qquad \begin{pmatrix} [f_1^{\nu}, & g_1^{\nu}]_{\varphi_0} & \cdots & [f_1^{\nu}, & g_{n_\nu}^{\nu}]_{\varphi_0} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ [f_{n_\nu}^{\nu}, & g_1^{\nu}]_{\varphi_0} & \cdots & [f_{n_\nu}^{\nu}, & g_{n_\nu}^{\nu}]_{\varphi_0} \end{pmatrix}.$$

$\dot{U}_a$ désignera maintenant la représentation unitaire de G *dans l'espace hilbertien* $H_{\varphi_0}^1$; on posera encore $[f_i^{\nu}, \dot{U}_a g_j^{\nu}]_{\varphi_0}=\sum_{k=1}^{n_\nu}(\dot{f}_{ik}^{\nu}, \dot{U}_a\dot{g}_{jk}^{\nu})_{\varphi_0}^1$ et $\boldsymbol{D}^{\nu}(f, \dot{U}_a g)_{\varphi_0}=([f_i^{\nu}, \dot{U}_a g_j^{\nu}]_{\varphi_0})_{i,j}$.

Par définition, on a aussitôt que

$$\begin{aligned} n_\nu(\dot{f}, U_a\dot{g})_{\varphi_0}^{\nu} &= \sum_{i,j}\iint_G \varphi_0(x^{-1}y)f_{ij}^{\nu}(x)D_{ij}^{\nu}(y)\overline{g_a(y)}dxdy \\ &= \sum_{i,j}(\sum_k D_{ik}(a)\iint_G \varphi_0(x^{-1}y)f_{ij}^{\nu}(x)\overline{g_{kj}^{\nu}(a^{-1}y)}dxdy \\ &= \sum_{i,k}D_{ik}(a)\sum_j(\dot{f}_{ij}^{\nu}, \dot{U}_a\dot{g}_{kj}^{\nu})_{\varphi_0}=\sum_k(\sum_i D_{ik}(a)[f_i^{\nu}, \dot{U}_a g_k^{\nu}]_{\varphi_0}), \end{aligned}$$

ce qui montre le

Théorème 15. *La représentation composée* U_a *dans* $H_{\varphi_0}^{\nu}$ *se décompose;*

$$(8.3)\qquad (\dot{f}, U_a\dot{g})_{\varphi_0}^{\nu}=\frac{1}{n_\nu}\ \mathit{Trace}\ [\mathfrak{D}^{\nu}(a)\boldsymbol{D}^{\nu}(f, \dot{U}_a g)_{\varphi_0}^{+}],$$

où $\boldsymbol{D}^{\nu}(\cdot)^{+}$ *désigne la transposée de* $\boldsymbol{D}^{\nu}(\cdot)$.

Étudions les cas particuliers; $(\dot{f}, U_a\dot{g})_{\varphi_0}^1=(\dot{f}, \dot{U}_a\dot{g})_{\varphi_0}^1$ et $(\dot{f}, U_a\dot{g})_1^{\nu}=(1/n_\nu)\ \mathit{Trace}\ [\mathfrak{D}^{\nu}(a)\boldsymbol{D}^{\nu}(f, g)_{\varphi_0}^{+}]$. De plus, dans le *Cas d'un groupe abélien*, pour $\mathfrak{D}^{\nu}=\chi_\nu$ et $\varphi_0=\chi_\lambda$, on a

1) S. Matsushita: *Fonctions presque périodiques du type spécial, I, II, III* dans les tomes précédents de Proc. Japan Acad., citées resp. [I], [II], [III].

$$(8.4)\qquad (\dot{f},\ U_a\dot{g})^{\nu}_{\varphi_0}=\chi_\nu(a)(\dot{f},\ \dot{U}_a\dot{g})_{\chi_\lambda}=\chi_\nu\chi_\lambda(a)(\dot{f},\ \dot{g})_{\chi_\lambda}.$$

Cas d'un groupe compact; désignons par $\boldsymbol{D}^{\nu\otimes\lambda}(f,g)$ la matrice de degré $n_\nu\times n_\lambda$ de telle forme que

$$\boldsymbol{D}^{\nu\otimes\lambda}(f,g)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}^{\lambda}(f^{\nu}_1,\ g^{\nu}_1)_{\varphi_\lambda} & \cdots & \boldsymbol{D}^{\lambda}(f^{\nu}_1,\ g^{\nu}_{n_\nu})_{\varphi_\lambda}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{D}^{\lambda}(f^{\nu}_{n_\nu},\ g^{\nu}_1)_{\varphi_\lambda} & \cdots & \boldsymbol{D}^{\lambda}(f^{\nu}_{n_\nu},\ g^{\nu}_{n_\nu})_{\varphi_\lambda}\end{pmatrix},$$

où $\varphi_\lambda(x)=D^{\lambda}_{kk}(x)$, $\boldsymbol{D}^{\lambda}(f^{\nu}_i,\ g^{\nu}_j)_{\varphi_\lambda}=\sum_{l=1}^{n_\nu}\boldsymbol{D}^{\lambda}(f^{\nu}_{il},\ g^{\nu}_{jl})_1=(\sum_l[(f^{\nu}_{il})^{\lambda}_p,\ (g^{\nu}_{jl})^{\lambda}_q]_1)_{p,q}$. Alors, on en déduit

$$(8.5)\qquad (\dot{f},\ U_a\dot{g})^{\nu}_{\varphi_\lambda}=\frac{1}{n_\nu}\ \mathit{Trace}\ [\mathfrak{D}^{\nu}\otimes\mathfrak{D}^{\lambda}(a)\boldsymbol{D}^{\nu\otimes\lambda}(f,g)^{+}],$$

ce qui remontre l'énonce du Théorème 12 [III].[2]

§9. Ce paragraphe sera consacré à des rappels relatifs au filtre $\mathfrak{F}_G$, qui est le même déjà mentionné (dans l'Exemple 3 [II]). Rappelons qu'il existe un filtre $\mathfrak{F}_G=\{g^{\lambda}\}_{\lambda}$ sur $P(G)\frown L^0(G)$, suivant lequel i) ses transformée de Fourier $\hat{g}^{\lambda}(\varphi)=\int_G\overline{\varphi(x)}g^{\lambda}(x)dx$, $0\leqq\hat{g}^{\lambda}(\varphi)\leqq 1$, convergent vers la constant *un* pour la topologie convergence compacte (sur V_0), ii) les mesures $g^{\lambda}dx$ vers la *masse de Dirac* étroitement, iii) leurs images cannoniques $\dot{g}^{\lambda}$ (comme les éléments d'un $H^{\nu}_{\varphi_0}$) vers un élément $\varepsilon^{\nu}_{\varphi_0}$ de $H^{\nu}_{\varphi_0}$. *D'autre part*, à toute $g\in P(G)$ est associée *au moins* une (et une seule, si G est abélien) mesure positive $d\mu_g$ sur V_0, tell qu'on ait

$$(9.1)\qquad \int_G\overline{g(x)}f(x)dx=\int_{V_0}\hat{f}(\varphi)d\mu_g(\varphi),\ \text{pour toute } f\in L^1(G).$$

Ceci permet de définir une famille filtrante (non unique) des mesures positives $\{\mu_\lambda\}_\lambda$ sur V_0 vis à vis du filtre $\mathfrak{F}_G$. Cette notation étant posée, on a les *formules étendues de Parseval* (*9.2*) (pour $f=g$), *de Bochner* (*9.3*), *d'inversion de Fourier* (*9.4*) comme suit;

$$(9.2)\qquad (\dot{f},\ \dot{g})^1_1=\lim_{\lambda}\int_{V_0}(\dot{f},\ \dot{g})^{\nu}_{\varphi}\,d\mu_\lambda(\varphi)\qquad \text{pour } f,g\in L^1\frown L^2(G),$$

$$(9.3)\qquad (\varepsilon^{\nu}_{\varphi},\ U_x\varepsilon^{\nu}_{\varphi})^{\nu}_{\varphi}=\hat{\tau}^{\nu}_{\varphi}(x),\quad (\varepsilon^{\nu}_{\varphi},\ \dot{f})^{\nu}_{\varphi}=\int_G(\varepsilon^{\nu}_{\varphi},\ U_x\varepsilon^{\nu}_{\varphi})\overline{f(x)}dx\qquad \text{pour } f\in L^1(G).$$

En tant que $f(\in L^1(G))$ est continue,

$$(9.4)\qquad f(x)=\lim_{\lambda}\int_{V_0}(\dot{f},\ U_x\varepsilon^{\nu}_{\varphi})^{\nu}_{\varphi}\,d\mu_\lambda(\varphi).$$

En combinant (9.3) et (9.4), on a

---

2) Puisque $\hat{\tau}^{\nu}_{\varphi_0}(x)=\varphi_\nu(x)\varphi_0(x)$ où $\varphi_\nu(x)=n_\nu\sum_i D^{\nu}_{ii}(x)$, on voit que la structure unitaire $\{H^{\nu}_{\varphi_0},\ U_x\}$ est contenue dans le produit tensoriel $\{H_{\varphi_\nu},\ U_x\}\wedge\{H_{\varphi_0},\ U_x\}$, mais il faut prendre garde que cette décomposition est différente que la nôtre.

$$(9.5)\qquad \begin{aligned} f(x) &= \lim_{\lambda} \int_{V_0}\int_{G} (U_y\varepsilon_\varphi^\nu, U_x\varepsilon_\varphi^\nu)_\varphi^\nu f(y)dy\, d\mu_\lambda(\varphi) \\ &= \lim_{\lambda} \int_{G} f(y) \int_{V_0} (U_y\varepsilon_\varphi^\nu, U_x\varepsilon_\varphi^\nu)_\varphi^\nu\, d\mu_\lambda(\varphi)dy, \end{aligned}$$

ce qui est une extension de *l'intégrale de Dirichlet.*[3]

Dans l'analyse harmonique, la famille filtrante des mesures $\{\mu_\lambda\}_\lambda$ est d'une importance énorme et l'emploi de celle-ci a été courante en "*analyse acoustique ou musicale*" pure et pratique, avec seulement de petites modifications techniques; *p. ex. distribution de Gauss*, $g^\lambda(x)=\lambda/\sqrt{\pi}\cdot\exp(-\lambda^2x^2)$ ou *fonction discontinue de Dirichlet*, $g^\lambda(x)=1/\lambda\,(|x|\leqq\lambda/2)$ et $=0\,(|x|>\lambda/2)$. *L'exemple de M. L. Schwartz* dans $G=R^n$ est

$$g^\lambda(x)=\begin{cases} 0 & (r>\lambda) \\ \dfrac{k}{\lambda^n}\exp\left(\dfrac{-\lambda^2}{\lambda^2-r^2}\right)(r\leqq\lambda), & k^{-1}=\displaystyle\iint\cdots\int_{r\leqq 1}\exp\left(\frac{-1}{1-r^2}\right)dx.^{4)} \end{cases}$$

Occupons-nous maintenant d'un groupe abélien ou bien campact: i) *Dans le cas où G est (l.c.) abélien*; j'ai montré que $\{\mu_\lambda\}_\lambda$ *converge vaguement vers la mesure de Haar* $d\chi$ *sur* $\hat{G}$, S. Matsushita: *Sur le théorème de Plancherel*, Proc. Japan Acad., **30** (1954). D'où il vient que l'on peut remplacer $\langle\!\langle \lim_\lambda d\mu_\lambda(\varphi)\rangle\!\rangle$ dans les formules (8.2), (8.4), (8.5) par $\langle\!\langle d\chi\rangle\!\rangle$; *p. ex.* puisque $(\dot{f}, U_x\varepsilon_\chi^\nu)_\chi^\nu=\hat{f}_{x^{-1}}(\chi_\nu\chi)$, (8.4) s'écrit $f(x)=\int_{\hat{G}}\hat{f}_{x^{-1}}(\chi)d\chi$.

ii) *Le cas où G est compact*; la transformée de Fourier de toute $D_{ii}^\nu(x)$ est $=m_x[\overline{D_{jj}^\tau(x)}D_{ii}^\nu(x)]=1/n_\nu$ (*si* $\tau=\nu$, $j=i$) ou$=0$ (*dans d'autres cas*); par ailleurs, V étant discret et ouvert dans V_0,[5] les restrictions des μ_λ à V sont discrètes,[6] d'où résulte

$$D_{ii}^\nu(e)=\lim_\lambda\int_{V_0}\hat{D}_{ii}^\nu(\varphi)\,d\mu_\lambda(\varphi)=\lim_\lambda\int_V\frac{1}{n_\nu}\,a_\lambda d\varepsilon_{D_{ii}^\nu}=\frac{1}{n_\nu}\lim_\lambda a_\lambda,$$

c'est-à-dire, $\lim_\lambda a_\lambda=n_\nu$. On retrouve ainsi le fait que *les restrictions des* μ_λ *à* V *convergent vaguement vers une mesure* $\mu^\wedge$ *placée masse* n_ν *en chacun* $\varphi_{D_{ii}^\nu}$ *des points de* V, par suite *la transformée de Fourier*

---

3) Dans le cas classique où $G=R^1$, on peut prendre *p. ex.* $g^\lambda(x)=\sin\pi x\lambda/\pi x$ (*noyau de Dirichlet*) avec $\lambda\in R^1$ croissant, au sens quelque peu imprecis (car cette g^λ n'est pas à support compact); (9.5) s'écrirait alors

$$(9.5)'\qquad f(x)=\lim_\lambda\int_{-\lambda}^{\lambda}d\nu\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-2\pi i\nu(t-x)}dt=\lim_\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\frac{\sin 2\pi\lambda(t-x)}{\pi(t-x)}\,dt.$$

4) L. Schwartz: *Théorie des distributions*; I et II (1950). Cette g^λ est $\in L^0(R^n)$ et $\in(\mathfrak{D})$.

5) Voir le Complément terminant ma Note précédente [III].

6) N. Bourbaki [1]: *Loc. cit.*, Chap. 3, §3.

de toute $f \in A(G)$ *peut être confondante avec sa série de Fourier.*

En posant $r_\lambda^\nu = n_\nu / a_\lambda$, (9.4) s'écrit alors

$$(9.4') \qquad f(x) = \lim_\lambda \int_V \hat{f}_{x^{-1}}(\varphi_{D_{ii}^\nu})\, d\mu_\lambda = \lim_\lambda \sum_\nu r_\lambda^\nu n_\nu \sum m[\overline{D_{ij}^\nu} f] D_{ij}^\nu(x),$$

ce qui n'est autre que le *théorème de sommation.*[7) 8)]

§ 10. *Famille fermée et théorie spectrale.* Tout d'abord pose-t-on les définitions suivantes: on dit qu'une variété linéaire fermée $\mathfrak{A}_0$ de $\mathfrak{A}(G)$ est une *famille fermée* (*f.f.*) si, quelle que soit une $\alpha \in \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_0$ contient toutes les translatées à deux côtés de α, par suite, sa moyenne $m[\alpha]$. De même, en munissant $L^\infty(G)$ de la topologie faible,[9)] on appellera *famille fermée* (*à gauche*) toute variété faiblement fermée $E(E^\sim)$ qui est invariante sous translations à deux côtés (resp. à gauche) dans $L^\infty(G)$. De plus, soit $\psi \in L^\infty(G)$, $E_\psi(E_\psi^\sim)$ est l'adhérence faible de l'ensemble des fonctions de la forme $\sum \alpha_i \beta_j (s_i^{-1} x t_j)$ (resp. $\sum \alpha_i (s_i^{-1} x)$), c'est-à-dire, le plus petite *f.f.* (à gauche) qui contient ψ.

Le *spectre* (*à gauche*) *de* $E(E^\sim)$ ou *de* $\psi \in L^\infty(G)$ est l'ensemble $\sigma(E)(\sigma(E^\sim))$ ou resp. $\sigma(\psi)(\sigma(\psi^\sim))$ des $\varphi \in V$, V étant le spectre de l'algèbre du groupe $L^1(G)$, tels que $\varphi(x) \in E(E^\sim)$ resp. $\in E_\psi(E_\psi^\sim)$.

10. 1. Étant donnée une *f.f. à gauche* $E^\sim$ (ou $E_\psi^\sim$), $I_E^\sim$ (ou $I_\psi^\sim$) désigne l'ensemble des $f \in L^1(G)$ orthogonales à $E^\sim$ (resp. $E_\psi^\sim$), c.-à-d. $\int_G f(x)\overline{\psi_0(x)}dx = 0$ pour toute $\psi_0 \in E^\sim$ (resp. $E_\psi^\sim$), qui est un idéal fermé à gauche de $L^1(G)$.

Théorème 16. $\mathfrak{A}_{E^\sim}$ *ou* $\mathfrak{A}_\psi$ *désignera l'ensemble des* $\alpha \in \mathfrak{A}^1(G)$ *telles qu'on ait* $\langle \hat{f}, \alpha \rangle(x) = 0$ *pour tout* $x \in G$ *et toute* $f \in I_E^\sim$ (*resp.* $\in I_\psi^\sim$), *alors*

i) $\mathfrak{A}_{E^\sim}$ (*ou* $\mathfrak{A}_\psi$) *est une f.f. de* $\mathfrak{A}(G)$,

ii) *si* $\alpha \in \mathfrak{A}_{E^\sim}$, *la transformée de Fourier-Stieltjes, pour tout* $x \in G$, *fixé*, $\tilde{\alpha}_{(x)}(t) = \int_{V_0} \varphi(t) d\alpha_{(x)}^*(\varphi)$ *et celle de* $m[\alpha]$, $\hat{\alpha}(t) = \int_{V_0} \varphi(t) dm^*[\alpha](\varphi)$, *appartiennent à* $E^\sim$.[10) 11)] *De même, si* $\alpha \in \mathfrak{A}_\psi$, $\tilde{\alpha}_{(x)}(t)$ *et* $\hat{\alpha}_{(x)}(t)$ *sont approchable faiblement par des polynomes de translatées de* $\psi(t)$ *à gauche*, $\sum \alpha_i \psi(s_i^{-1} t)$,

iii) *si* $\varphi_0 \in \sigma(E^\sim)$, *on a* $\Delta_{\varphi_0}^\nu \subset \mathfrak{A}_{E^\sim}$ *pour tout* $\nu \in \Lambda$ *et vice versa.*

Les α considérées étant bornées, la démonstration sera immédiate

7) S. Bochner-J. von Neumann: *Loc. cit.*, Théorème 30.

8) Pour un groupe quelconque, grâce à l'isomorphisme $A(G) \cong C(\Phi^0(A(G)))$, pour cette notation voir S. Matsushita [2], *Loc. cit.*, §1, il suffira de considérer $G^* = \Phi^0(A(G))$ (groupe compact) et la transformée de Fourier de $\mathring{\phi}(f)$, image de $f \in A(G)$ par l'application $\mathring{\phi}$; $A(G) \to C(G^*)$.

9) L^∞ est le dual de L^1; on aura soin de ne pas canfondre L_∞ et L^∞.

10) μ^* désigne la mesure conjuguée de μ.

11) Pour cette $\hat{\alpha}$, voir encore Théorème 10 [II].

en vertu du théorème de Fubini; *p. ex.* $g \in I_E^{\sim}$ équivaut à

$$\int_G g(t)\overline{\alpha_{(x)}(t)}dt = \int\int_G g(t)\overline{\varphi(t)}dt\, d\alpha^*_{(x)}(\varphi) = \int_{V_0} \hat{g}(\varphi) d\alpha^*_{(x)}(\varphi) = 0.$$

Signalons en passant qu'une *f.f.* (à gauche ou à deux côtés), quand même elle n'aurait jamais été réduite à zero, ne peut posséder nécessairement le spectre *non nul*; par contre, on pourra toujours affirmer l'existence exacte du spectre pourva que G est abélien (prouvé par M. R. Godement).[12] Toutefois, en vertu de (9.1), on peut prouver que $\psi(x) \in P(G)$, par suite $\in \Pi(G)$, ou bien $\in L^\infty(G) \frown L^2(G)$ possède leur spectre $\sigma_\psi^{\sim}$ *non nul* (ceci a été prouvé par M. Godement pour σ_ψ (*à deux côtés*),[13] mais il n'y a aucune difficulté à passer au cas de $\sigma_\psi^{\sim}$).

10.2. On appelle *spectre de* $\alpha \in \mathfrak{A}(G)$, *noté* $\sigma(\alpha)$, l'adhérence de la réunion des supports des mesures $\alpha(x)$, $x \in G$; étant donné un fermé $\sigma \subset V$, $\mathfrak{A}_\sigma$ désignera l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{A}(G)$ telles que $\sigma(\alpha) \subset \sigma$.

Théorème 17. i) *$\sigma(\alpha)$ est l'adhérence de $\bigcup_{\sigma\in\Lambda}\sigma(\alpha_\nu)$, où $\alpha_\nu = \alpha_{\mathfrak{D}^\nu}$ (section dans $\mathfrak{D}^\nu$).* ii) *$\mathfrak{A}_\sigma$ est une f.f. de $\mathfrak{A}(G)$, qui contient, avec $\alpha(x)$, tout produit $f(x)\alpha(x)$* par *$f \in A(G)$ et, si $\varphi_0 \in \sigma$, tout $\Delta^\nu_{\varphi_0}(\nu \in \Lambda)$.*[14] iii) $\mathfrak{A}_{\sigma(E^\sim)} \subset \mathfrak{A}_{E^\sim}$.

Lemme 3. $\langle \hat{f}, \alpha_\nu \rangle (x) = \langle \hat{f}, \alpha \rangle_{\mathfrak{D}^\nu}(x)$, $\hat{f} \in L^0(V_0)$.

En effet, on a $\langle \hat{f}, \alpha_\nu \rangle (x) = \sum n_\nu D^\nu_{pq}(x) \langle \hat{f}, m[D^\nu_{pq}\alpha] \rangle = \sum n_\nu D^\nu_{pq}(x)$ $m_t[\overline{D^\nu_{pq}(t)} \langle f, \alpha \rangle (t)] = \langle \hat{f}, \alpha \rangle_{\mathfrak{D}^\nu}(x)$: en s'appuyant ce Lemme, on va démontrer i) de Théorème 17, mais $(\bigcup_{\nu\in\Lambda}\sigma(\alpha_\nu))^a \subset \sigma(\alpha)$ est clair. Or, $\langle \hat{f}, \alpha \rangle (x)$ étant $\in A(G)$, $\langle \hat{f}, \alpha \rangle (x)$ est la limite uniforme de l'agrégée finie des $\langle \hat{f}, \alpha \rangle_{\mathfrak{D}^\nu}(x) = \langle \hat{f}, \alpha_\nu \rangle (x)$, donc $\langle \hat{f}, \alpha_\nu \rangle = 0$ pour tout $\nu \in \Lambda$ entraîne $\langle \hat{f}, \alpha \rangle = 0$, d'où résulte que $\sigma(\alpha) \subset (\bigcup_{\nu\in\Lambda}\sigma(\alpha_\nu))^a$, ce qui prouve i). ii) est trivial.

Une conséquence intéressante du Lemme 3 est le

Théorème 18. *Pour que $\alpha \in \mathfrak{A}_\sigma$ (ou $\in \mathfrak{A}_{E^\sim}$), il faut et il suffit que $\alpha_\nu \in \mathfrak{A}_\sigma$ (resp. $\in \mathfrak{A}_{E^\sim}$) pour tout $\nu \in \Lambda$.*

Or, toute $\alpha_\nu \in \mathfrak{A}_{\sigma(E^\sim)}$ s'engendre dans $\mathfrak{A}(G)$ de mesures du type $D^\nu_{pq} d\varepsilon_{\varphi_0}$, $\varphi_0 \in \sigma(E)$, d'où d'après iii) de Théorème 16, α_ν est contenue dans $\mathfrak{A}_{E^\sim}$; le Théorème 18 montre alors que $\mathfrak{A}_{\sigma(E^\sim)} \subset \mathfrak{A}_{E^\sim}$, ce qui démontre iii) du Théorème 17.

10.3. Tout produit $\hat{f}\cdot\alpha(x)$ d'une $\alpha \in \mathfrak{A}(G)$ par $\hat{f} \in L^0(V_0)$ appartient aussi à $\mathfrak{A}(G)$, comme on le vérifie immédiatement: nous dirons qu'une

---

12) R. Godement: *Théorie taubériens et théorie spectrale*, Ann. Éc. Norm. Sup., **64** (1947).

13) R. Godement: *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948).

14) La première propriété dans ii) est bien valable pour $\mathfrak{A}_{E^\sim}$.

f. f. de $\mathfrak{A}(G)$ est *spectrale* si, pour toute $\hat{f} \in L^0(V_0)$, elle contient le produit $\hat{f} \cdot \alpha$ avec α. Il est clair que toute $\mathfrak{A}_\sigma$ est *spectra'e;* on voit encore

Théorème 19. *Si $\mathfrak{A}_{E\sim}$ est spectrale, elle coïncide avec $\mathfrak{A}_{\sigma(E\sim)}$. Dans un groupe abélien, toute $\mathfrak{A}_E$ étant spectrale, on a toujours $\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}_{\sigma(E)}$. Il en est encore ainsi si l'on remplace $\mathfrak{A}_{E\sim}$ et $\mathfrak{A}_{\sigma(E\sim)}$ par $\mathfrak{A}_\Psi$ et $\mathfrak{A}_{\sigma(\Psi\sim)}$ respectivement.*

(*à suivre*)

Corrections à Shin-ichi Matsushita: "Fonctions Presque Périodiques du Type Spécial. II"

(Proc. Japan Acad., **31**, No. 3, 156–160 (1955))

Page 160, ligne 19 du haut, au lieu de "dans $M_{\mathfrak{D}}$," lire "dans $\mathfrak{D}$".

Page 160, lignes 12, 3, et 2 d'en bas, au lieu de "$dm_x[\alpha(x)]$," lire "$d\bar{m}_x^*[\alpha(x)]$" (où le signe $*$ désigne la mesure conjugée).