97. *Sur Quelques Relations concernant les Opérations P_α et S_α sur les Classes d'Ensembles*

Par Tadashi OHKUMA
Section des Mathématiques, Institut Technologique, Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1955)

1. Soit K une classe d'ensembles. On désigne par $P_\alpha(K)$ (resp. $S_\alpha(K)$), la classe de tous les ensembles qui sont intersections (resp. réunions) des moins que $\aleph_\alpha$ ensembles appartenant à K. Ainsi on a des opérations P_α et S_α définies sur les classes d'ensembles. En général, pour deux opérations F et G sur les classes d'ensembles, nous définissons leur produit FG par la formule

$(FG)(K)=F(G(K))$ pour toute classe K d'ensembles, et nous écrivons $F\leqq G$, si

$F(K)\subseteqq G(K)$, pour toute classe K d'ensembles.

2. MM. W. Sierpinski, A. Tarski, A. Koźniewski, et A. Lindenbaum ont discuté une condition pour qu'on ait

$$P_\alpha S_\beta \leqq S_\gamma P_\delta \tag{1}$$

et celle pour qu'on ait

$$P_\alpha S_\beta = S_\gamma P_\delta.\text{[1]} \tag{2}$$

Et, ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème A. *Pour qu'on ait l'inégalité (1), il faut et il suffit que $\alpha\leqq\delta$ et que la condition suivante soit remplie:*

Condition (π) *pour toute famille* $\{\mathfrak{m}_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ *des nombres* $\mathfrak{m}_\lambda$ *cardinaux,* $\overline{\overline{\Lambda}}<\aleph_\alpha$ *et* $\mathfrak{m}_\lambda<\aleph_\beta(\lambda\in\Lambda)$ *entrainent* $\prod_{\lambda\in V}\mathfrak{m}_\lambda<\aleph_\gamma$.

Théorème B. *Pour qu'on ait l'égalité (2), il faut et il suffit que $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ et ces nombres ordinaux soient fortement inaccessibles (c'est-à-dire, pour toute famille $\{\mathfrak{m}_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ des nombres $\mathfrak{m}_\lambda$ cardinaux, $\overline{\overline{\Lambda}}<\aleph_\alpha$ et $\mathfrak{m}_\lambda<\aleph_\alpha(\lambda\in\Lambda)$ entrainent $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{m}_\lambda<\aleph_\alpha$).*

Maintenant, en se servant leurs résultats, nous avons obtenu les conditions pour qu'on ait plusieurs inégalités et égalités entre les terms $P_{\alpha_1}S_{\beta_1}$, $S_{\alpha_2}P_{\beta_2}$, $P_{\alpha_3}S_{\beta_3}P_{\gamma_3}$, et $S_{\alpha_4}P_{\beta_4}S_{\gamma_4}$. Le but de cette note est de mentionner seulement ces résultats obtenus, et leurs démonstrations et considerations détailles seront publiées ailleurs.

3. Les lemmes suivants sont fondamentaux pour notre discussion.

Lemme 1. *Soient $F(S_{\alpha_1},\dots,S_{\alpha_m};P_{\beta_1},\dots,P_{\beta_n})$ et $G(S_{\gamma_1},\dots,S_{\gamma_s};P_{\delta_1},\dots,P_{\delta_t})$ (m,n,s, et t sont nombres naturels) daux nomônes des opérations S_{α_i}, P_{β_i}, S_{γ_i}, et P_{δ_i}. Alors,*

1) Cf. [1] et [2].

$$F(S_{\alpha_1},\dots,S_{\alpha_m};P_{\beta_1},\dots,P_{\beta_n})\leqq G(S_{\gamma_1},\dots,S_{\gamma_s};P_{\delta_1},\dots,P_{\delta_t})$$

implique

$$F(P_{\alpha_1},\dots,P_{\alpha_m};S_{\beta_1},\dots,S_{\beta_n})\leqq G(P_{\gamma_1},\dots,P_{\gamma_s};S_{\delta_1}\dots,S_{\delta_t}).$$

Lemme 2. *Soient F et G les menômes dans le Lemme 1, et soit I l'opération telle que $I(K)=K$ pour toute classe K d'ensembles. Alors,*

$$F(S_{\alpha_1},\dots,S_{\alpha_m};P_{\beta_1},\dots,P_{\beta_n})\leqq G(S_{\gamma_1},\dots,S_{\gamma_s};P_{\delta_1},\dots,P_{\delta_t})$$

entraine

$$F(S_{\alpha_1},\dots,S_{\alpha_m};I,\dots,I)\leqq G(S_{\gamma_1},\dots,S_{\gamma_s};I,\dots,I)$$

et

$$F(I,\dots,I;P_{\beta_1},\dots,P_{\beta_n})\leqq G(I,\dots,I;P_{\delta_1},\dots,P_{\delta_t}).$$

Pour deux nombres α et β ordinaux donnés, nous désignons par $\pi_\alpha(\beta)$ le plus petit nombre γ ordinal qui satisfait à la condition (π) dans le Théorème A. Alors le Théorème A peut être énoncé comme il suit.

Lemme 3. *Pour qu'on ait l'inégalité (1), il faut et il suffit que $\alpha\leqq\delta$ et $\pi_\alpha(\beta)\leqq\gamma$.*

En autre part, M. A. Tarski a montré le fait suivant;[2]

Lemme 4. *Pour qu'on ait*

(3) $$P_\alpha P_\beta\geqq P_\gamma,\quad (\textit{ou bien } S_\alpha S_\beta\geqq S_\gamma)$$

il faut et il suffit que

(i) $$\sup(\alpha,\beta)\geqq\gamma$$

ou bien

(ii) $$\gamma=\beta+1,\ \textit{et } cf(\beta)<\alpha.$$[3]

4. Or, au grâce à ces lemmes, nous avons facilement le

Théorème 1. *Pour qu'on ait*

(4) $$S_\alpha P_\beta S_\gamma\leqq P_\delta S_\varepsilon\quad (\textit{ou bien } P_\alpha S_\beta P_\gamma\leqq S_\delta P_\varepsilon),$$

il faut et il suffit que $\pi_\alpha(\beta)\leqq\delta$ et

$$\begin{cases}\gamma<\varepsilon & \textit{si } cf(\gamma)<\alpha\leqq\gamma+1,\\ \sup(\alpha,\gamma)\leqq\varepsilon, & \textit{sinon.}\end{cases}$$

5. Quant à l'inégalité

(5) $$S_\alpha P_\beta S_\gamma\leqq S_\delta P_\varepsilon\quad (\text{ou bien } P_\alpha S_\beta P_\gamma\leqq P_\delta S_\varepsilon)$$

le lemme suivant est utile:

Lemme 5. *Soient F et G deux monomes des S_{α_i} et P_{β_i} (cf. Lemme 1) et soient X et Y deux classes d'ensembles telles que $X_\rho\in X$ et $Y_\sigma\in Y$ entrainent $X_\rho\frown Y_\sigma=\Phi$. Alors, $F(X\smile Y)\subseteqq G(X\smile Y)$ implique $F(X)\subseteqq G(X)\smile\{\Phi\}$.*[4]

Au grâce de ce lemme, nous pouvons montrer le

Théorème 2. *Pour qu'on ait l'inégalité (5), il faut et il suffit que $\beta\leqq\varepsilon$ et*

$$\pi_\beta(\gamma)<\delta\qquad \textit{si } cf(\pi_\beta(\gamma))<\alpha\leqq\pi_\beta(\gamma)+1,$$

2) Cf. [3].

3) $cf(\beta)$ est le plus petit nombre confinal à β (cf. [3]).

4) $\{\Phi\}$ est la classe d'ensemble qui ne contient que l'ensemble vide Φ.

$sup(\alpha, \pi_\beta(\gamma)) \leqq \delta$, *sinon.*

6. Or, pour discuter l'inégalité

(6) $\quad P_\alpha S_\beta P_\gamma \geqq P_\delta S_\varepsilon$ (ou bien $S_\alpha P_\beta S_\gamma \geqq S_\delta P_\varepsilon$),

le lemme suivant est fondamental.

Lemme 6. *Quand il existe une famille* $\{\mathfrak{m}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ *nombres cardinaux telle que* $\aleph_\alpha \leqq \bar{\bar{\Lambda}} < \aleph_\delta$, $\mathfrak{m}_\lambda < \aleph_\varepsilon (\lambda \in \Lambda)$ *et telle que, pour toute famille* $\{\Lambda_\xi; \xi \in \Xi\}$, *où* $\bar{\bar{\Xi}} < \aleph_\alpha$, *d'ensembles qui remplit* $\bigcup_{\xi \in \Xi} \Lambda_\xi = \Lambda$, *il y a* $\xi \in \Xi$ *tel que* $\prod_{\lambda \in \Lambda_\xi} \mathfrak{m}_\lambda > \aleph_\beta$, *nous avons alors* $P_\delta S_\varepsilon \not\leqq P_\alpha S_\beta P$.[5]

Avant mentioner la condition pour l'inégalité (5), nous introduissons une notation. La fonction $\pi_\alpha(\beta)$ de deux nombres α et β ordinaux est continue par rapport à α, mais non par rapport à β, et en général on a $\lim_{\beta' \to \beta} \pi_\alpha(\beta') \leqq \pi_\alpha(\beta)$ pour un nombre β limité. Donc, pour un nombre β limité, nous posons

$$l\pi_\alpha(\beta) = \lim_{\beta' \to \beta} \pi_\alpha(\beta').$$

Alors, d'après le lemme 6, nous avons le

Théorème 3. *Pour qu'on ait l'inégalité (6), il faut et il suffit que* $\varepsilon \leqq \beta$ *et une des conditions suivantes soit remplite;*

(i) $\delta \leqq \alpha$,

(ii) $\pi_{\delta^*}(\varepsilon) \leqq \beta$, *et* $\delta^* \leqq \gamma$,

(iii) ε *est limité,* $l\pi_{\delta^*}(\varepsilon) \leqq \beta$, $\delta^* < \gamma$ *et* $cf(\varepsilon) < \alpha$,

où

$\delta^* = \delta$ *si* δ *est limité, ou bien* $\delta = \delta' + 1$, *et* $\alpha \leqq cf(\delta')$,

$\delta^* = \delta'$ *si* $\delta = \delta' + 1$ *et* $cf(\delta') < \alpha$.

7. Comme les conséquences des Théorème 1 et Théorème 3, nous avons la condition pour qu'on ait

(7) $\quad P_\alpha S_\beta P_\gamma = P_\delta S_\varepsilon$ (ou bien $S_\alpha P_\beta S_\gamma = S_\delta P_\varepsilon$).

Aprés quelques calculations assez compliquées sur $\pi_\alpha(\beta)$, nous avons le

Théorème 4. *Pour qu'on ait (7), il faut et il suffit que* $\beta = \varepsilon$ *et qu'une de trois conditions suivantes soit remplite;*

(i) $\alpha = \delta$ *et* $\pi_\beta(\gamma) < \delta$,

(ii) $\alpha = \delta = cf(\alpha) = \pi_\beta(\gamma)$,

(iii) $\alpha \leqq \beta = \gamma = \delta (= \varepsilon)$ *et* β *(et aussi* γ, δ, *et* ε*) est fortement inaccessible (c'est-à-dire* $\pi_\beta(\beta) = \beta$*).*

8. Toutes les conclusions présédentes ont été obtenues sans faire appeler la hypothèse du continu généralise (pour abreviation, nous la désignerons par H), mais sans faire appeler H, nous n'avons pas réussi de déterminer la condition pour qu'on ait

(8) $\quad P_\delta S_\varepsilon \leqq S_\alpha P_\beta S_\gamma$, (ou bien $S_\delta P_\varepsilon \leqq P_\alpha S_\beta P_\gamma$).

---

5) $P(K)$ est la classe de toutes les intersections des nombres arbitraires d'ensembles appartinant à K (cf. [3]).

En autre part, l'hypothèse H implique

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha(\beta) &= \beta && \text{si } \beta=\beta'+1 \text{ et } \alpha \leqq cf(\beta'),\\
& && \text{ou bien } \beta \text{ est limité et } \alpha \leqq cf(\beta),\\
&= \beta+1 && \text{si } \beta=\beta'+1 \text{ et } cf(\beta') < \alpha \leqq \beta,\\
&= \beta+2 && \text{si } \beta \text{ est limité et } cf(\beta) < \alpha \leqq \beta,\\
&= \alpha && \text{si } \alpha \text{ est limité et } \beta < \alpha,\\
&= \alpha+1 && \text{si } \alpha=\alpha'+1 \text{ et } \beta < \alpha.
\end{aligned}$$

Et donc, en se servant l'hypothèse H nous avons le

Théorème 5. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait* (8) *est que* $\delta \leqq \beta$ *et qu'une de trois conditions suivantes soit remplite;*

(i) $\varepsilon \leqq \gamma$,

(ii) $\pi_\delta(\varepsilon) \leqq \alpha$,

(iii) $\varepsilon = \gamma+1$, *et* $\delta \leqq cf(\gamma) < \alpha$.

9. Au grâce des Théorème 1 et Théorème 5, en se servant l'hypothèse H, nous avons le

Théorème 6. *Pour qu'on ait la égalité*

$$P_\delta S_\varepsilon = S_\alpha P_\beta S_\gamma \quad (\textit{ou bien } S_\delta P_\varepsilon = P_\alpha S_\beta P_\gamma), \tag{9}$$

il faut et il suffit que

(i) $\delta=\beta$, $\varepsilon=\gamma$, $\pi_\alpha(\beta)=\beta$, *et* $\alpha \leqq cf(\gamma)$,

ou bien

(ii) $\gamma \leqq \delta = \varepsilon = \alpha = \beta$, *et* α (*et aussi* β, δ, *et* ε) *soit inaccessible.*

Références

[1] W. Sierpinski et A. Tarski: Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles, Fund. Math., **15**, 292–300 (1930).

[2] A. Koźniewski et A. Lindenbaum: Sur les opérations d'addition et multiplication dans les classes d'ensembles, ibid., 342–355.

[3] A. Tarski: Sur les classes d'ensembles closés par rapport à certaines opérations élémentaires, Fund. Math., **16**, 181–304 (1930).