141. *Sur l'Endomorphisme Complètement Continu*

Par Masuo HUKUHARA et Yasutaka SIBUYA
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Nov. 12, 1955)

1. La théorie des endomorphismes complètement continus de l'espace de Banach a été établie par Riesz[1] et Schauder.[2] M. J. Leray[3] a substitué à l'espace de Banach l'espace topologique linéaire à voisinage convexe. Récemment M. J. H. Williamson[4] a réussi à supprimer la convexité de voisinages. L'un des auteurs a obtenu indépendamment de lui les mêmes résultats par une voie différente. Il l'a montré à l'occasion de ses leçons et puis l'autre a remarqué que l'on peut établir la théorie même dans l'espace ($\mathfrak{L}$) linéaire sans aucune modification essentielle dans les raisonnements.

2. Donnons d'abord quelques définitions et les résultats qui s'en déduisent.

Soit $\mathfrak{R}$ un espace ($\mathfrak{L}$) de Fréchet où la topologie $\mathfrak{T}$ est définie à l'aide d'un système de suites $\{\mathfrak{S}(x); x \in \mathfrak{R}\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° la suite $\{x_n\}$ telle que $x_n = x$ appartient à $\mathfrak{S}(x)$;

2° une suite partielle de la suite $\mathfrak{S}(x)$ appartient à $\mathfrak{S}(x)$;

3° $\mathfrak{S}(x) \cap \mathfrak{S}(y) = 0$ pour $x \neq y$.

Un point a est appelé point adhérent de l'ensemble E si l'on peut extraire de E une suite $\in \mathfrak{S}(a)$. Un point a est par définition intérieur à E, si a n'est pas un point adhérent de l'ensemble complémentaire de E. Tout ensemble à l'intérieur duquel se trouve a est par définition voisinage de a. Le système de ces voisinages $\{\mathfrak{V}(x); x \in \mathfrak{R}\}$ définit la même topologie $\mathfrak{T}$. On dit qu'une suite de points $\{a_n\}$ converge vers a si un voisinage quelconque de a contient presque tous les a_n. Une suite $\in \mathfrak{S}(a)$ converge vers a.

Une suite $\{a_n\}$ convergeant vers a est caractérisée par la propriété suivante: de toute suite partielle de la suite on peut extraire une suite partielle $\in \mathfrak{S}(a)$. Si une suite converge vers a et si $a \neq b$, elle ne converge pas vers b.

---

1) F. Riesz: Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math., **41**, 71–98 (1918).

2) J. Schauder: Über lineare vollstetige Funktionaloperationen, Studia Math., **2**, 183–196 (1940).

3) J. Leray: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinage convexe, Acta Szeged, **12**, 177–186 (1950).

4) J. H. Williamson: Compact linear operators in linear topological spaces, Journ. London Math. Soc., **29**, 149–156 (1954).

Si un système de suites satisfaisant aux trois conditions 1°, 2°, 3° définit la même topologie $\mathfrak{T}$, il est dit fondamental.

3. Nous supposons de plus que $\mathfrak{R}$ soit un espace vectoriel sur un corps de nombres complexes (ou réels) satisfaisant aux conditions suivantes:

4° $\{x_n\} \in \mathfrak{S}(x)$, $\{y_n\} \in \mathfrak{S}(y) \Rightarrow \{x_n+y_n\} \in \mathfrak{S}(x+y)$;

5° $\{x_n\} \in \mathfrak{S}(x)$, $\alpha_n \to \alpha \Rightarrow \{\alpha_n x_n\} \in \mathfrak{S}(\alpha x)$.

Si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *et* $\{\alpha_n\}$ *sont des séries convergentes, on a*

$$\lim (x_n+y_n) = \lim x_n + \lim y_n,$$
$$\lim (\alpha_n x_n) = \lim \alpha_n \lim x_n.$$

Le système $\mathfrak{S}(a)$ *est alors l'ensemble des suites* $\{x_n+a\}$ *telles que* $\{x_n\} \in \mathfrak{S}(=\mathfrak{S}(o))$. *Le système* $\mathfrak{V}(a)$ *est formé des ensembles* $\{Va;\ V \in \mathfrak{V}(=\mathfrak{V}(o))\}$.

4. Un ensemble E est dit borné si l'on a la condition: si $\{x_n\}$ est une suite extraite de E et si $\{\varepsilon_n\}$ est une suite de nombres convergeant vers 0, la suite $\{\varepsilon_n x_n\}$ converge vers o. Un ensemble E est dit compact si l'on peut extraire de toute suite extraite de E une suite partielle convergente. *Un ensemble compact est borné.*

5. Soit M un sous-espace fermé. L'image par M d'un voisinage de o est par définition voisinage de M dans l'espace quotient $\mathfrak{R}/M$. Le système de ces voisinages définit la topologie $\mathfrak{T}/M$ de l'espace quotient. *L'image par M de* $\{\mathfrak{S}(x); x \in \mathfrak{R}\}$ *est un système fondamental de suites dans* $\mathfrak{R}/M$. *L'image par M d'un ensemble E est bornée ou compacte suivant que E est borné ou compact.*

6. Un sous-espace à la dimension n est homéomorphe à l'espace euclidien $\mathfrak{E}_n$. Il est donc fermé.

Soient E un ensemble borné, M un sous-espace fermé et N un sous-espace tel que $\dim N < \infty$, $M \cap N = \{o\}$. L'ensemble $\{x \in N;\ E \cap Mx \neq 0\}$ est borné. On en déduit que, *si* $0<\sigma<1$, *on peut extraire de E un point a tel que* $\sigma E \cap Ma = 0$. A l'aide de cette propriété, on peut démontrer que *s'il existe un voisinage compact, la dimension de l'espace est finie.*

7. Soit L un opérateur linéaire qui applique $\mathfrak{R}$ dans un espace $(\mathfrak{L})$ linéaire $\mathfrak{R}'$. L est dit continu si l'on a $Lx_n \to o'$ pour $\{x_n\} \in \mathfrak{S}$. Cette condition est équivalente à la suivante: à chaque voisinage $V \in \mathfrak{V}'$ on peut faire correspondre un voisinage $U \in \mathfrak{V}$ tel que $L\{U\} \subseteq V$. L est dit complètement continu, s'il est continu et si de plus il existe un voisinage dont l'image est compacte. On a évidemment la proposition suivante.

Si L est un endomorphisme continu et si K est un endomorphisme complètement continu, LK et KL sont complètement continus. Si L et K sont des endomorphismes complètement continus, $L+K$ est complètement continu. Si M et N sont des sous-espaces fermés tels que

$M \supseteqq L\{N\}$ et si L est un endomorphisme complètement continu, ML est un opérateur complètement continu de $\mathfrak{R}/N$ dans $\mathfrak{R}/M$.

8. L étant un endomorphisme de $\mathfrak{R}$, nous définissons les sous-espaces N^n et N_n par $N^n = L^{-n}\{o\}$, $N_n = L^n\{\mathfrak{R}\}$. Les entiers μ et ν sont définis par

$$\mu = \inf\{n; N^n = N^{n+1}\}, \quad \nu = \inf\{n; N_n = N_{n+1}\}.$$

Si l'on a toujours $N^n \subset N^{n+1}$, nous posons $\mu = \infty$. De même $\nu = \infty$ signifie que l'on a $N_n \supset N_{n+1}$ pour tous les n. Nous avons montré[5] que si μ et ν sont finis, ils sont égaux. Il en résulte l'alternative de Fredholm. Il s'agit donc de démontrer que μ et ν sont finis, en supposant que $K = I - L$ soit complètement continu.

9. L'endomorphisme $K_n = I - L^n$ est complètement continu. Il existe donc dans N^n un voisinage compact. Par suite la dimension de N^n est finie.

10. Soit V un voisinage dont l'image par K est compacte. Pour démontrer $\mu < \infty$, nous supposons le contraire. Si $0 < \sigma < 1$, on peut extraire de $N^n \cap V$ un point a^n tel que

$$(\sigma V) a^n \cap N^{n-1} = 0.$$

Le point $b^n = Ka^n$ appartient à N^n mais non à N^{n-1}. On peut extraire de la suite $\{b^n\}$ une suite partielle convergente $\{b'^n\}$. Soit a sa limite. Si $m < n$, le point x défini par $b^m - b^n = x - a^n$ appartient à N^{n-1}. Par suite $b^m - b^n$ appartient à $N^{n-1}(-a^n)$ et non à σV. Ceci est absurde parce que la suite $\{b'^n\}$ est convergente. Il est donc démontré que *μ est fini.*

11. Pour démontrer que N_n est fermé, il suffit de le montrer pour le cas de $n=1$. Soit a un point adhérent de N_1. On peut extraire de N_1 une suite $\{a_n\} \in \mathfrak{S}(a)$. On peut écrire $a_n = Lb_n$. Si $N^1 b_n \cap V \neq 0$, on peut supposer que $b_n \in V$ et que la suite $\{Kb_n\}$ converge vers un point c. La suite $\{b_n\}$ converge alors vers le point $b = a + c$ et l'on a $a = Lb \in N_1$.

Il en est de même s'il existe un nombre positif σ tel que $N^1 b_n \cap \sigma V \neq 0$ pour une infinité de n. Supposons donc la non-existence d'un tel σ.

On peut prendre le nombre positif σ_n tel que

$$N^1 b_n \cap \sigma_n V = 0, \quad N^1 b_n \cap 2\sigma_n V \neq 0, \quad \sigma_n \to \infty.$$

On peut supposer que $b_n \in 2\sigma_n V$ et que la suite des points $a'_n = Kb'_n$ où $b'_n = \dfrac{1}{2\sigma_n} b_n$ converge vers un point a'. On a alors

$$b'_n = a'_n + \frac{1}{2\sigma_n} a_n \to a', \quad Lb'_n = \frac{1}{2\sigma_n} a_n \to o,$$

et puis $La' = o$. Or la relation $N^1 b_n \cap \sigma_n V = 0$ est équivalente à

5) M. Hukuhara: Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, Journ. Fac. Sci., Univ. Tokyo, I, **7**, 129–192 (1954).

$b'_n \notin N^1\{\frac{1}{2}V\}$ et $\{b'_n\}$ ne peut converger vers aucun point de N^1. On arrive donc à une contradiction. Par suite N_n *est fermé.*

12. N_nK est un endomorphisme complètement continu de l'espace quotient $\mathfrak{R}/N_n$ et l'endomorphisme $N_nL=N_n-N_nK$ fait correspondre N_n à N_{n-1}/N_n. On en conclut que *la codimension de* N_n *est finie.*

13. Pour démontrer $\nu<\infty$, supposons le contraire. Si $0<\sigma<1$, on peut extraire de $N_n \cap V$ un point a_n tel que $(\sigma V)a_n \cap N_{n+1}=0$. Si $m>n$, le point x défini par $b_m-b_n=x-a_n$ appartient à N_{n+1}, et l'on a $b_m-b_n \in N_{n+1}(-a_n)$. On peut en déduire une contradiction comme au n° 10. *L'entier* ν *est donc fini.*

14. *Dans le cas de* $\mu=\nu=0$, *l'endomorphisme* H *défini par* $L^{-1}=I-H$ *est complètement continu.*

Pour démontrer la continuité, prenons une suite $\Phi=\{a_n\} \in \mathfrak{S}(o)$. Un raisonnement pareil à celui du n° 11 montrera que l'on a $b_n \in \sigma V$ pour presque tous les n si σ est assez grand.

Soit Φ' une suite partielle quelconque de Φ. On peut extraire de $K\Psi'=KL^{-1}\Phi'$ une suite partielle convergente $K\Psi''$. Soit b sa limite. $\Psi''=\Phi''+K\Psi''$ converge vers b, car $\Phi''=L\Psi'$ est une suite partielle de Φ. On a donc $Lb=o$, ce qui exige $b=o$. Par suite Ψ converge vers o.

L^{-1} étant continu, $W=L\{V\}$ est un voisinage de o. Si Φ est une suite extraite de W, $\Psi=L^{-1}\Phi$ est une suite extraite de V. Si Φ' est une suite partielle de Φ, on peut extraire de $K\Psi'=KL^{-1}\Phi'$ une suite partielle convergente $K\Psi''$. $H\Phi''=-K\Psi''$ est une suite partielle convergente de $H\Phi'$. $H\{W\}$ est donc compact.

15. Si $\mu=\nu<\infty$, $\mathfrak{R}$ est la somme directe de N^μ, N_ν. Soit $\underline{L}=I-\underline{K}$ un endomorphisme supplémentaire de L. Si l'on restreint $\underline{L}$ à N_ν, on rentre dans le cas de $\mu=\nu=0$. $\underline{K}$ est donc complètement continu dans N_ν. Il est complètement continu aussi dans N^μ car $\dim N^\mu<\infty$. Par suite, $\underline{K}$ *est un endomorphisme complètement continu.*

16. Soit $\mathfrak{R}^*$ un espace conjugué de $\mathfrak{R}$. Nous supposons que K est complètement continu dans $\mathfrak{R}^*$. Nous définissons les sous-espaces ${}^nN^*$ et ${}_nN^*$ par

$$ {}^nN^*=\{o^*\}L^{-n}, \quad {}_nN^*=\{\mathfrak{R}^*\}L^n, $$

et les entiers μ^* et ν^* par

$$ \mu^*=\inf\{n; {}^nN^*={}^{n+1}N^*\}, \quad \nu^*=\inf\{n; {}_nN^*={}_{n+1}N^*\}. $$

Alors, d'après les résultats obtenus antérieurs, on a

$$ \mu^*=\nu^*=\mu=\nu, $$
$$ \dim {}^nN^*=\operatorname{codim} {}_nN^*=\dim N^n=\operatorname{codim} N_n, $$
$$ N_n={}^nN^*_\perp, \quad {}_nN^*={}_\perp N^n. $$

17. Pour que l'on obtienne ces relations, il suffit que L et $\underline{L}$ soient définis dans $\mathfrak{R}^*$. Par exemple, on peut prendre pour $\mathfrak{R}^*$

l'ensemble des fonctionnelles linéaires définies dans $\mathfrak{R}$.

18. Appelons valeur propre la valeur α telle que $L[\alpha]=I-\alpha K$ applique au moins un point $\neq o$ sur o. Il est facile de voir que l'ensemble des valeurs propres est fermé. Soit α une valeur propre. Les sous-espaces N^n, N_n correspondant à $L[\alpha]$ seront désignés par $N^n[\alpha]$, $N_n[\alpha]$. Puis nous désignerons par $\mu[\alpha]$, $\nu[\alpha]$ les entiers μ, ν correspondants. On a toujours $\mu[\alpha]=\nu[\alpha]<\infty$. $N^n[\alpha]$, $N_n[\alpha]$ étant indépendants de n pourvu que n dépasse $\mu[\alpha]$, $\nu[\alpha]$, nous les désignerons par $N^\infty[\alpha]$, $N_\infty[\alpha]$.

$\mathfrak{R}$ est la somme directe de $N^\infty[\alpha]$, $N_\infty[\alpha]$. α n'est pas une valeur propre pour K restreint à $N_\infty[\alpha]$. Par suite, la valeur assez proche de α n'est pas une valeur propre pour K restreint à $N_\infty[\alpha]$. D'autre part, on voit sans peine qu'aucune valeur $\neq\alpha$ n'est propre pour K restreint à $N^\infty[\alpha]$. On en conclut que *toutes les valeurs propres sont isolées*.

19. Dans le cas où K est un endomorphisme complètement continu d'un espace topologique linéaire, nous prenons pour $\mathfrak{S}(x)$ l'ensemble de toutes les suites convergeant vers x. K est complètement continu par rapport à la topologie définie par le système des suites $\{\mathfrak{S}(x); x\in\mathfrak{R}\}$. Nos résultats sont donc applicables.