8. *Théorème de Krein-Milman et le Balayage de Mesures dans la Théorie du Potentiel. II*

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1956)

Dans §§ 4–5, nous continuerons à étudier la mesure balayée pour un domaine compact exposée dans une Note précédente,[1] et les propriétés du potentiel de cette mesure. Ensuite, nous envisageons la relation entre l'ensemble des points extrémaux *Ext.* $M^{\wedge}(D)$ de $M^{\wedge}(D)$ et les points-frontières réguliers, et finalement nous donnerons une solution du problème généralisé de Dirichlet.

§ 4. **Potentiel d'une mesure balayée 1.** Dans ce qui suit, comme la définition de la capacité d'un ensemble, nous adoptons celle de M. C. de La Vallée Poussin; c'est à dire qu'on appelle *capacité d'un compact K*, notée $c(K)$, la borne suppérieure de normes des mesures positives ν réparties sur K telles que $U^{\nu}\leqq 1$: pour un ensemble quelconque A, *la capacité intérieure* $c(A)$ est défine par $\sup_{k\subset A} c(K)$. Conformément à la définition, $c(A)>0$ entraîne qu'il existe une mesure ν avec son support compact contenu dans A et vérifiant $U^{\nu}<+\infty$.[2] On dit encore qu'une propriété borélienne a lieu *à peu près partout* (*à p. p. p.*) sur A si le sous-ensemble de A qui ne possède pas cette propriété est de capacité intérieure nulle.[3]

Or, en vertu de l'égalité (3.5), on a $U^{\mu}=U^{\mu_\Gamma}$ *à p. p. p.* sur Γ quelle que soit $\mu\in\mathfrak{M}_0^+(D)$: s'il n'en est pas ainsi, il existait une $\nu\in\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ de l'énergie finie, vérifiant $\int U^{\mu}d\nu>\int U^{\mu_\Gamma}d\nu$, ce qui est contradictoire avec (3.5) parce que ν elle-même peut être considérée comme une mesure balayée de ν et donc $\nu_\Gamma^0=\nu$ (d'après l'unicité du balayage pour le cas où μ_Γ^0 est de l'énergie finie, au § 3).

Proposition 3. *Pour toute mesure* $\nu\in\mathfrak{M}(E-\overline{D})$ *ou mesure de l'énergie finie* $\nu\in\mathfrak{M}(E-D)$, *on a* $\int U^{\mu}d\nu=\int U^{\mu_\Gamma}d\nu$ *et, en particulier,* $U^{\mu}(x)=U^{\mu_\Gamma}(x)$ *partout sur* $E-\overline{D}$ *et à p. p. p. sur* Γ. *De plus,* $\int d\mu=\int d\mu_\Gamma$.

La dernière égalité découle aisément en prenant la mesure sphérique λ_0 sur $\Sigma\supset\overline{D}$ et vérifiant $U^{\lambda_0}(x)=1$ sur l'intérieur de Σ.

1) Proc. Japan Acad., **31**, 643–647 (1955), Nous renvoyons à cette Note dont nous conservons la terminologie et les notations.

2) Cette ν est nécessairement *de l'énergie finie.*

3) Ce mot a été introduit par M. M. Brelot.

Théorème 1. *Soient μ une mesure de $\mathfrak{M}^+(\overline{D})$ et μ_Γ sa balayée sur Γ de l'énergie finie; alors μ_Γ est uniquement déterminée et elle satisfait aux conditions:*

α) $U^\mu \geqq U^{\mu_\Gamma}$ *partout sur* E,

β) $U^\mu = U^{\mu_\Gamma}$ *sur* $E-\overline{D}$ *et à p. p. p. sur* Γ.

Il suffit de prouver pour le cas où $\mu \in \mathfrak{M}_0^+(D)$: α) découle du principe du maximum en tenant compte de (3.5), μ_Γ étant de l'énergie finie et $\mu_\Gamma^0 = \mu_\Gamma$ (d'après l'unicité). β) est le même que la deuxième partie de Prop. 3.

On peut encore caractériser la mesure balayée d'une mesure de l'énergie finie $\mu \in \mathfrak{M}^+(\overline{D})$ en disant que, parmi des mesures de l'énergie finie $\nu \in \mathfrak{M}^+(\Gamma)$, μ_Γ est ce qui achève la minimum de l'énergie $I(\nu-\mu)$ et, par suite, de *l'intégrale de Gauss* $G_\mu(\nu)$;

$$G_\mu(\nu) = \int U^\nu - 2U^\mu d\nu = I(\nu-\mu) - I(\mu).$$

En effet, par un calcul simple, on a $I(\nu-\mu) = I((\nu-\mu_\Gamma)+(\mu_\Gamma-\mu)) \geqq I(\mu_\nu-\mu)$ en tenant compte de Prop. 3.

§ 5. **Potentiel d'une mesure balayée, 2.** Dans ce n^0, nous abandonnons la restriction sur les mesures balayées qu'elles sont de l'énergie finie; alors il n'en est plus de même sur les mesures générales de $\mathfrak{M}_0^+(D)$ sans cette restriction — c'est à dire qu'une mesure balayée μ_Γ de μ n'est pas uniquement décidée en général. Toutefois, on verra dans la suite que la mesure μ_Γ^0 définie dans § 3 est uniquement déterminée:

Pour une $\nu \in \mathfrak{M}_0^+(D)$ de l'énergie finie, on a

$$\int U^\nu d\mu_\Gamma^0 = \int U^\mu d\nu_\Gamma, \tag{5.1}$$

d'après (3.5) et que $\nu_\Gamma = \nu_\Gamma^0$. Si μ_Γ^1 satisfait à (5.1), on aura $\int U^\nu d\mu_\Gamma^1 = \int U^\nu d\mu_\Gamma^0$ quelle que soit la mesure de l'énergie finie $\nu \in \mathfrak{M}_0^+(D)$, par suite $\nu \in \mathfrak{M}^+(E)$ (car $U^{\mu_\Gamma^1}(x) = U^{\mu_\Gamma^0}(x)$ en dehors de $\overline{D}$); il en est de même en particulier que pour toute mesure sphérique λ_x, d'où $U^{\mu_\Gamma^1}(x) = U^{\mu_\Gamma^0}(x)$ partout sur E, ce qui montre $\mu_\Gamma^1 = \mu_\Gamma^0$. Ainsi, μ_Γ^0 est exactement unique (elle n'est pas autre que la *mesure balayée proprement dit*). Dans ce qui suit, nous l'appellerons simplement *mesure balayée de* μ lorsqu'aucune confusion ne sera possible.[4]

Théorème 1$^{\text{bis}}$. *Pour toute mesure positive μ sur $\overline{D}$ et sa balayée μ_Γ^0, le Théorème 1 est valide.*

Tout revient à prouver que $U^\mu \geqq U^{\mu_\Gamma^0}$ sur E; il vient de (5.1)

4) Par contre, une mesure μ_Γ définie dans les paragraphes précédents sera dite mesure balayée *au sens général*.

que $\int U^{\mu_\Gamma^0} d\lambda = \int U^{\mu_\Gamma^0} d\lambda^0 + \int U^{\mu_\Gamma^0} d\lambda^* = \int U^\mu d(\lambda^0)_\Gamma^0 + \int U^\mu d\lambda^*$ $\leqq \int (U^{\lambda^0} + U^{\lambda^*}) d\mu = \int U^\mu d\lambda$, où λ^0 et λ^* désignent les restrictions de λ dans $\overline{D}$ et $E-\overline{D}$ respectivement pour toute λ sphérique, d'où résulte $U^{\mu_\Gamma^0}(x) \leqq U^\mu(x)$ quand λ_x tend vers ε_x.

Remarque — Pour une mesure $\mu \in \mathfrak{M}(\overline{D})$ quelconque, on définit $\mu_\Gamma^0 = (\mu^+ + \mu^-)_\Gamma^0 = (\mu^+)_\Gamma^0 - (\mu^-)_\Gamma^0$, pour laquelle on a la

Proposition 3$^{\text{bis}}$. *En remplacant μ_Γ par μ_Γ^0, μ étant quelconque de $\mathfrak{M}(\overline{D})$, Proposition 3 reste encore valide et*

(5.2) $$\int U^\nu d\mu_\Gamma^0 = \int U^{\nu_\Gamma^0} d\mu_\Gamma^0 \quad \textit{pour toute } \nu \in \mathfrak{M}(\overline{D}).$$

§ 6. **Point-frontière régulier et irrégulier.** Nous allons étudier, dans ce paragraphe, l'ensemble des points-frontières réguliers définis comme suit: on appelle *point-frontière régulier* tout point $x \in \Gamma$ vérifiant $U^\mu(x) = U^{\mu_\Gamma^0}(x)$ pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_0^+(D)$, et *point-frontière irrégulier* tout point qui n'en est pas ainsi.

Théorème 2. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes:*
α) *x est un point-frontière régulier,*
β) $(\varepsilon_x)_\Gamma^0 = \varepsilon_x$,
γ) *$x \in \Gamma_0$, c.-à-d., $\varepsilon_x^\wedge \in Ext. M^\wedge(D)$.*

Démonstration: Compte tenu de (3.5), il est clair que β) entraîne α); d'autre part, α) exprime que $\int U^\nu d\varepsilon_x = U^\nu(x) = U^{\nu_\Gamma^0}(x)$ $= \int U^{\varepsilon_x} d\nu_\Gamma^0$ pour tout $\nu \in \mathfrak{M}_0^+(D)$ de l'énergie finie, d'où selon l'argumentation dans § 5 il vient que $\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_\Gamma^0$, ce qui montre l'équivalence de α) et β). Si $x \in \Gamma_0$, ε_x coïncide avec toute mesure balayée possible $(\varepsilon_x)_\Gamma$ et donc avec $(\varepsilon_x)_\Gamma^0$, c'est-à-dire, γ) entraîne β). Inversement, soit $(\varepsilon_x)_\Gamma^0 = \varepsilon_x$ et posons $\varepsilon_x^\wedge = \frac{1}{2}(\mu_1^\wedge + \mu_2^\wedge)$ où $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_0^+(D)$; alors on a $(\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2))_\Gamma^0 = (\varepsilon_x)_\Gamma^0 = \varepsilon_x$ par la définition du balayage et l'unicité de μ_Γ^0,[5] d'où il faut que $(\mu_1)_\Gamma^0 = (\mu_2)_\Gamma^0 = \varepsilon_x$. Cela étant, on a $U^{\mu_1}(y) =$ $U^{(\mu_1)_\Gamma^0}(y) = U^{\varepsilon_x}(y)$ pour tout point $y \in E - \overline{D}$, donc $\mu_1^\wedge = \varepsilon_x^\wedge$ (par suite, $= \mu_2^\wedge$), ce qui que montre $\varepsilon_x^\wedge \in Ext. M^\wedge(D)$, autrement dit, $x \in \Gamma_0$. Ainsi, l'équivalence β) et γ) est établie.

Proposition 4. *La capacité de l'ensemble des points-frontières irréguliers est égale à zéro, c.-à-d., $c(\Gamma - \Gamma_0) = 0$.*

D'après β) de Théorème 1, la proposition est manifeste.

Proposition 5. *Soit $\{y\}$, $y \neq x$, une suite des points de $\overline{D}$ qui converge vers un point $x \in \Gamma$; pour que $(\varepsilon_y)_\Gamma^0$ converge vaguement vers ε_x, il faut et il suffit que $x \in \Gamma_0$.*

---

5) Par définition, ε_x est considérée comme une balayée au sens général de la mesure $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$.

En effet, soit $\{z\}$ une sous-suite quelconque de $\{y\}$; comme $\varepsilon_z \to \varepsilon_x$ vaguement, on a $\varepsilon_z^\wedge = (\varepsilon_z)_\Gamma^{0\wedge} \to \varepsilon_x^\wedge = (\varepsilon_x)_\Gamma^{0\wedge}$ dans $M^\wedge(D)$.

Selon la compacité de $\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$, il existe une sous-suite $\{(\varepsilon_{z'})_\Gamma^0\}$ de $\{(\varepsilon_z)_\Gamma^0\}$ qui converge vaguement vers une $\mu \in \mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$, d'où $(\varepsilon_{z'})_\Gamma^{0\wedge} \to \mu^\wedge$; d'ailleurs, $(\varepsilon_z)_\Gamma^{0\wedge} \to (\varepsilon_x)_\Gamma^{0\wedge}$ entraîne $\mu^\wedge = (\varepsilon_x)_\Gamma^{0\wedge}$. Ceci étant, si $x \in \Gamma_0$, on a $\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_\Gamma^0 = \mu$. Comme la sous-suite $\{(\varepsilon_z)_\Gamma^0\}$ est arbitraire, $(\varepsilon_y)_\Gamma^0$ elle-même converge vers ε_x.

Quant au réciproque, il va résulte de la proposition plus générale:

Proposition 6. *Soit x un point-frontière irrégulier, $x \in \Gamma - \Gamma_0$, alors il y a une suite $\{y\}$ des points de D, convergeant vers x, telle que $(\varepsilon_y)_\Gamma^0$ ne convergent pas vers ε_x.*

Puisque $x \in \Gamma - \Gamma_0$, il existe au moins une $\mu \in \mathfrak{M}_0^+(D)$ telle que $U^\mu(x) > U^{\mu_\Gamma^0}(x)$ par définition: supposons maintenant que $(\varepsilon_y)_\Gamma^0 \to \varepsilon_x$ vaguement pour toute suite $\{y\}, y \to x$; alors on aurait $\underline{\lim}_{y \to x} U^{\mu_\Gamma^0}(y) = \underline{\lim}_{y\to x} \int U^\mu d(\varepsilon_y)_\Gamma^0 \geqq U^\mu(x) > U^{\mu_\Gamma^0}(x)$. Pour une boule ouvert convenable V_x de centre x, on a ainsi $U^{\mu_\Gamma^0}(z) > U^{\mu_\Gamma^0}(x)$ pour tout $z \in V_x \frown D$. D'ailleurs, U^μ étant semi-continu inférieurement, il existe une boule ouvert V_x' centrée en x telle que $U^\mu(z) > U^{\mu_\Gamma^0}(x)$ pour tout $z \in V_x' \frown (E - \overline{D})$. Posant W_x(boule)$= V_x \frown V_x'$, on obtient

$$\int_{W_x} U^{\mu_\Gamma^0}(z) dz \Big/ \int_{W_x} dz > U^{\mu_\Gamma^0}(x),$$

où dz désigne la mesure de Lebesgue à n dimensions, pour laquelle Γ (ensemble frontière) est de mesure nulle. C'est un absurde, car $U^{\mu_\Gamma^0}$ est surharmonique sur E.

Voici, en passant, un critérium très simple pour qu'un point $x \in \Gamma$ soit régulier:

Proposition 7. *Si l'on peut écrire une sphère osculatrice extérieure Σ à la surface Γ en un point $x \in \Gamma$, alors x est régulier, $x \in \Gamma_0$.*

En effet, soit x_0 le centre de Σ et prenons un point z dans le segment xx_0 et une sphère Σ_z du rayon $< l = r(x, z)$; si $\varepsilon_x^\wedge = \alpha\mu^\wedge + \beta\nu^\wedge$, $\mu \neq \nu$ et $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta = 1$, on a $\mu^\wedge(U^{\lambda_z})$ et $\nu^\wedge(U^{\lambda_z}) < l^{2-n} = \varepsilon_x^\wedge(U^{\lambda_z})$, où λ_z est répartie sur Σ_z et $U^{\lambda_z} \in H(D)$, ce qui est absurde, d'où la proposition.

§ 7. **Problème généralisé de Dirichlet.** Nous désignons par $C(\Gamma)$ l'espace Banach des fonctions continues dans Γ pour la norme $\|f\| = \sup_{x \in \Gamma} |f(x)|$. En prolongeant f en une fonction f^0 continue à support compact sur E, on sait qu'il existe une combinaison linéaire $g = \sum \alpha_i (U^{\lambda_i} - U^{\lambda_i'})$ telle qu'on ait $|f^0(x) - g(x)| < \varepsilon$ sur E, à fortiori sur Γ_0, où λ_i et λ_i' sont sphériques sur Σ_i et $\Sigma_i' \supset \Sigma_i$ de centre commun respectivement.[6] Considérons les restrictions $\lambda_i^0(\lambda_i'^0)$ et $\lambda_i^*(\lambda_i'^*)$

6) Cf. H. Cartan: *Loc. cit.*

comme dans la démonstration du Thr. 1^{bis}, et posons $\tau^0=\sum\alpha_i(\lambda_i^0-\lambda_i'^0)$ et $\tau^*=\sum\alpha_i(\lambda_i^*-\lambda_i'^*)$; alors $g^0=U^{(\tau_0)_\Gamma^0}+U^{\tau^*}$ est harmonique dans D et $g(x)=g^0(x)$ pour tout $x\in\Gamma_0$, de plus, on a $g^0(x)=\int U^{\varepsilon_x}d((\tau^0)_\Gamma^0+\tau^*)$ $=\int U^{(\varepsilon_x)_\Gamma^0}d\tau+\int U^{(\varepsilon_x)_\Gamma^0}d\tau^*=\int_\Gamma g^0(y)d(\varepsilon_x)_\Gamma^0$, quel que soit $x\in D$. D'ailleurs, on a

$$\left|g^0(x)-\int fd(\varepsilon_x)_\Gamma^0\right|<\varepsilon,\qquad x\in D, \tag{7.1}$$

puisque $|g^0-f|=|g-f|<\varepsilon$ sur Γ_0. Posant $\tilde f(x)=\int fd(\varepsilon_x)_\Gamma^0$, on a $\left|\int\tilde f(t)d\lambda_x-\tilde f(x)\right|\leqq\left|\int[\tilde f(t)-g^0(t)]d\lambda_x\right|+\left|g^0(x)-\tilde f(x)\right|<2\varepsilon$ pour toute λ_x sphérique sur $\Sigma_x\subset D$, d'où résulte $\int\tilde f(t)d\lambda_x=\tilde f(x)$, ε étant arbitraire. Ceci montre que $\tilde f$ est harmonique dans D, et $\lim\tilde f(x)=f(x_0)$ suivant $x\in D\to x_0\in\Gamma_0$.

Théorème 3. *Pour toute $f\in C(\Gamma)$, il existe une et une seule fonction $\tilde f(x)$, bornée harmonique dans D et ayant sa valeur-frontière égale à $f(x_0)$ sur Γ_0 (autrement dit, à p. p. p. sur Γ).*

Si $x_0\in\Gamma-\Gamma_0$, il existe au moins une $f\in C(\Gamma)$ telle que $\tilde f(x)$ ne converge pas vers $f(x_0)$ quand $x\to x_0$ d'une manière convenante.[7]

Tout revient à prouver l'unicité de la solution du problème de Dirichlet $\tilde f(x)$: soient V_x les boules des centres $x\in\Gamma-\Gamma_0$ et du rayon $1/2^k\,(k=1,2,\cdots)$ et posons $D_k=D-(\Sigma_{x\in\Gamma-\Gamma_0}V_x)$ et Γ_k=frontière de D_k. Étant donné x_0 quelconque $\in D$, il existe un entier k_0 tel que x_0 soit contenu dans D_k pour tout $k>k_0$; soient ensuite $(\varepsilon_{x_0})_k^0$ les balayées de $\varepsilon_{x_0}\in\mathfrak{M}_0^+(D_k)$ sur Γ_k et désignons par $(\varepsilon_{x_0})_k^1$ et $(\varepsilon_{x_0})_\mu^2$ les restrictions de $(\varepsilon_{x_0})_k^0$ à $\Gamma\frown\Gamma_k$ et à $\Gamma_k-(\Gamma\frown\Gamma_k)$ respectivement pour chaque k. Il existe alors une sous-suite de $\{(\varepsilon_{x_0})_k^0\}$ qui converge vaguement vers une mesure μ sur $\Gamma(\mathfrak{M}_0^+(D)$ étant compact), mais $\mu^\wedge=\varepsilon_{x_0}^\wedge=(\varepsilon_{x_0})_\Gamma^{0\wedge}$ et donc $\mu=(\varepsilon_{x_0})_\Gamma^0$ selon l'unicité. Cette sous-suite sera notée encore par la même lettre $\{(\varepsilon_{x_0})_k^0\}$; alors $((\varepsilon_{x_0})_k^0\to(\varepsilon_{x_0})_\Gamma^0$ et $(\varepsilon_{x_0})_k^2\to 0$ vaguement suivant $k\to\infty$.

Supposons que $\mathring f(x)$ soit bornée harmonique dans D et remplisse $\lim_{x\to y}\mathring f(x)=f(y)$ pour tout $y\in\Gamma_0$; $u(x)=\tilde f(x)-\mathring f(x)$ est alors harmonique dans D_k et continue sur $\overline{D}_k$, et comme tout point-frontière de Γ_k est régulier (voir Prop. 7),[8] on a $u(x_0)=\int_{\Gamma_k}u(x)d(\varepsilon_{x_0})_k^0$ et de plus

7) Sinon $(\varepsilon_x)_\Gamma^0$ convergerait vaguement vers ε_{x_0}, contrairement à ce que $x_0\in\Gamma-\Gamma_0$; voir Théorème 2.

8) Dans tout domaine D avec la frontière $\Gamma=\Gamma_0$, l'unicité est évidente, puisque toute fonction harmonique h dans D ne peut achever sa valeur maximum ni minimum et donc $h=0$ sur $\Gamma=\Gamma_0$ entraîne $h=0$ partout sur D.

$\int_{\Gamma_k} u(x) d(\varepsilon_{x_0})_k^1 = 0$ (car $\mathring{f}(x) = \tilde{f}(x)$ sur Γ_0). D'où il vient que

$$|u(x_0)| = \left| \int_{\Gamma_k} u(x) d(\varepsilon_{x_0})_k^2 \right| \leqq K \int d(\varepsilon_{x_0})_k^2 \to 0$$

suivant $k \to \infty$, où $K = \sup_{x \in D} |u(x)|$, ce qui montre l'unicité cherchée comme x_0 est arbitraire.

Remarque — Le balayage et le problème de Dirichlet pour un domaine arbitraire serons étudiés dans les paragraphes §§ 8~10.

(*à suivre*)