19. Über die eindeutige Darstellung der Ideale als Durchschnitt schwacher Primärideale

Von Shinziro MORI

Mathematisches Institut, Hiroshima Universität, Japan

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 13, 1956)

Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit Einheitselement, in dem sich jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellen lässt.*) Dann gilt nach der Endlichkeit der Teilerkette von Halbprimidealen verständlicherweise

Hilfssatz 1. *Es sei in der Teilerkette von Idealen aus* $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{a}_3\subset\cdots$$

jedes Ideal kein Nilideal in bezug auf das vorangehende. Dann bricht die Kette im Endlichen ab.

Es ergibt sich hieraus

Hilfssatz 2. *Ist die Darstellung* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$ *eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *eindeutig, so sind alle* $\mathfrak{q}_i$ *die isolierten Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$.

Zum Beweis seien $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_s$ isoliert und $\mathfrak{q}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{q}_n$ nicht isoliert. Es sei ferner $\mathfrak{p}_n$ das zu $\mathfrak{q}_n$ gehörige Primideal, welches ein Teiler von $\mathfrak{p}_1$, aber, kein Teiler von $\mathfrak{p}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{p}_{n-1}$ ist. Dann können wir ein Element d_1 in $\mathfrak{q}_{s+1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ finden. Daraus erhalten wir $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_s\frown(d_1, \mathfrak{a})$, und nach der Eindeutigkeit der Darstellung von $\mathfrak{a}$ $(d_1, \mathfrak{a})=\mathfrak{q}_1'\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_t'\frown\mathfrak{q}_{s+1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$, und dabei gehört $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ nicht zu $(d_1, \mathfrak{a})$. Ist $\mathfrak{q}_n$ nicht isoliert in bezug auf $(d_1, \mathfrak{a})$, so suchen wir in $\mathfrak{q}_{s+1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$ ein Element d_2 auf, welches nicht nilpotent in bezug auf $(d_1, \mathfrak{a})$ ist. Dann gilt wieder

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_s\frown(d_1, d_2, \mathfrak{a}),\ (d_1, d_2, \mathfrak{a})=\mathfrak{q}_1''\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_u''\frown\mathfrak{q}_{s+1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir nach Hilfssatz 1 endlich

*) Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring ohne irgendwelche Bedingung. Jedes Ideal ist dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jede Teilerkette von Halbprimidealen bricht im Endlichen ab.
2. Jede Kette $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(b)\subset\mathfrak{a}:(b^2)\subset\cdots$ für ein beliebiges Element b bricht im Endlichen ab, und der letzte Idealquotient $\mathfrak{d}_1$ heisst Grenzideal von $\mathfrak{a}$. Wenn wir von neuem die Kette $\mathfrak{d}_1\subset\mathfrak{d}_1:(b_1)\subset\mathfrak{d}_1:(b_1^2)\subset\cdots$ für ein Element b_1 bilden, so gewinnen wir auch ein Grenzideal $\mathfrak{d}_2$ von $\mathfrak{d}_1$. Wenn wir in solcher Weise eine Teilerkette $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{d}_1\subset\mathfrak{d}_2\subset\cdots$ von Grenzidealen $\mathfrak{d}_i$ erzeugen, liegt die Länge der Kette unterhalb einer mit $\mathfrak{a}$ fest gegebenen Schranke.

Vgl. S. Mori: Über kommutative Ringe mit der Teilerkettenbedingung für Halbprimideale, Jour. Sci. Hiroshima Univ., **16**, 247-260 (1952).

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_s\frown(d_1, d_2, \cdots, d_m, \mathfrak{a}),$$
$$(d_1, d_2, \cdots, d_m, \mathfrak{a})=\mathfrak{q}_1^{(m)}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_v^{(m)}\frown\mathfrak{q}_{s+1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n,$$

wobei $\mathfrak{q}_n$ eine isolierte Primärkomponente von $(d_1, d_2, \cdots, d_m, \mathfrak{a})$ ist. Da wir $\mathfrak{p}_n$ als das zugehörige Primideal von $\mathfrak{q}_n$ angenommen haben, so ergibt sich nach der Eindeutigkeit der Darstellung von $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_s\frown(d_1\mathfrak{p}_n, d_2\mathfrak{p}_n, \cdots, d_m\mathfrak{p}_n, \mathfrak{a}),$$
$$(d_1\mathfrak{p}_n, \cdots, d_m\mathfrak{p}_n, \mathfrak{a})=\mathfrak{q}_1^{(m+1)}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_w^{(m+1)}\frown\mathfrak{q}_{s+1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n,$$

und dabei ist $\mathfrak{q}_n$ auch eine isolierte Primärkomponente von $(d_1\mathfrak{p}_n, \cdots, d_m\mathfrak{p}_n, \mathfrak{a})$.

Aus $(d_1, d_2, \cdots, d_m, \mathfrak{a})\subseteqq\mathfrak{q}_n$ und $(\mathfrak{q}_1^{(m+1)}\frown\cdots\mathfrak{q}_w^{(m+1)}\frown\mathfrak{q}_{s+1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_{n-1})\mathfrak{q}_n \subseteqq (d_1\mathfrak{p}_n, d_2\mathfrak{p}_n, \cdots, d_m\mathfrak{p}_n, \mathfrak{a})$ folgt damit

$$\begin{aligned} r_1d_1&\equiv p_{11}d_1+p_{12}d_2+\cdots+p_{1m}d_m \quad (\mathfrak{a})\\ r_2d_2&\equiv p_{21}d_1+p_{22}d_2+\cdots+p_{2m}d_m \quad (\mathfrak{a})\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_md_m&\equiv p_{m1}d_1+p_{m2}d_2+\cdots+p_{mm}d_m \quad (\mathfrak{a}), \end{aligned}$$

wo p_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}_n$ und $r_1, r_2, \cdots, r_m$ die Elemente ausserhalb von $\mathfrak{p}_n$ bedeuten.

Durch Elimination von $d_2, \cdots, d_m$ ergibt sich daraus

$$(r-p)d_1\equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \quad r\notin\mathfrak{p}_n, \quad p\in\mathfrak{p}_n.$$

Da aber $d_1\notin\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_n$ ist, so erhalten wir $(r-p)\in\mathfrak{p}_1$, also $r\in\mathfrak{p}_n$. Das widerspricht aber der soeben gewonnenen Tatsache $r\notin\mathfrak{p}_n$. Hiermit müssen alle Primärkomponenten $\mathfrak{q}_i$ von $\mathfrak{a}$ isoliert sein.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes:

In $\mathfrak{R}$ ist die Darstellung eines Ideals als Durchschnitt schwacher Primärideale dann und nur dann eindeutig, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Ist ein Primideal $\mathfrak{p}'$ ein Teiler eines anderen Primideals $\mathfrak{p}$, so gilt $\mathfrak{p}'\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ für jedes durch $\mathfrak{p}$ teilbare Ideal $\mathfrak{a}$.

Es sei zunächst die Darstellung $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$ eindeutig. Dann ist $\mathfrak{q}_i$ nach Hilfssatz 2 die isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{p}'\supset\mathfrak{p}\supset\mathfrak{a}$, so ist eine Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Folglich haben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{p}'$ dasselbe zugehörige Halbprimideal und dieselben isolierten Primärkomponenten. Hieraus folgt $\mathfrak{p}'\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$.

Umgekehrt sei $\mathfrak{p}'\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ für jedes Ideal $\mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'$ ist. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal und $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal, so gilt nach der Endlichkeit der Halbprimidealenkette $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{p}_n$. Es sei nun $\mathfrak{q}_i$ die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$. Dann haben wir $\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{a}'=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$. Nach der Konstruktion von $\mathfrak{q}_i$ können wir die Elemente $r_1, r_2, \cdots, r_n$ so annehmen, dass für ein Element a' aus $\mathfrak{a}'$

$$r_ia'\in\mathfrak{a}, \quad r_i\notin\mathfrak{p}_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

wird.

Wenn $a'\notin\mathfrak{a}$ ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{a}:(a') \neq \mathfrak{R}, \qquad (r_1, r_2, \cdots, r_n, \mathfrak{a}) \subseteqq \mathfrak{d}.$$

Bedeutet $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{d}$ gehöriges Primideal, so ist $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$ verschieden und eines, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ ist durch $\mathfrak{p}$ teilbar, und folglich ergibt sich $(a') \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$. Nach unserer Voraussetzung erhalten wir damit $\mathfrak{p}(a')=(a')$, und danach $a' \equiv pa'$ $(\mathfrak{a})$ für ein Element p aus $\mathfrak{p}$. Aus $\mathfrak{d}=\mathfrak{a}:(a')$ folgt damit $(1-p) \subset \mathfrak{d}$. Da aber $\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{d}$ ist, ergibt sich daraus ein Widerspruch $\mathfrak{d}=\mathfrak{R}$. Hiermit muss $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n$ sein. Aus dem Ergebniss, dass $\mathfrak{q}_i$ isoliert ist, geht die Eindeutigkeit der Darstellung von $\mathfrak{a}$ klar hervor.