156. L'Intégrale de Denjoy et l'Intégration au Moyen des Espaces Rangés. I

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1956)

En utilisant la méthode des espaces rangés, Prof. K. Kunugi a élargi la notion de l'intégrale dans la Note "Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I".[1] Le but de ces Notes est de montrer que l'intégrale au sens de Denjoy (Denjoy-Perron) peut être considérée d'au point de vue de cette notion.

Dans cette Note, nous allons surtout montrer que, pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable au sens de Denjoy, il faut et il suffit qu'il existe, dans l'espace rangé ε,[2] une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=v_n(f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, jouissant de la propriété P' (qu'on donne plus bas) et telle qu'on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ presque partout dans l'intervalle $[a,b]$.

Nous nous conformons, sauf indication contraire, à la notation et à la terminologie de la Note de Prof. K. Kunugi.

Définition 1. Nous dirons qu'une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, jouit de la *propriété* P' si elle satisfait aux conditions suivantes α) et β):

α) On peut poser, pour tout n $(n=0,1,2,\cdots)$,

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+p_n(x)+r_n(x),$$

où $p_n(x)$, $r_n(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant, outre qu'elles satisfont aux conditions [1], [2] et [3],[3] aux conditions suivantes:

$\alpha.1$) On a $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\int_{CF_{n+1}}{}^{4)} |p_m(x)|\,dx<2^{-\nu_{n+1}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

$\alpha.2$) Pour tout système élémentaire[5] d'intervalles I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ tel que $I_i\cap F_n\neq 0$ pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} r_n(x)dx\right|<2^{-\nu_n}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

1) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956).

2) Voir K. Kunugi: Loc. cit.

3) Elles désignent les conditions [1], [2] et [3] qui sont données dans la Note de K. Kunugi: Loc. cit., c-à-d. [1] $r_n(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F_n. [2] On a $\int_a^b |p_n(x)|\,dx<2^{-\nu_n}$. [3] On a $|\int_a^b r_n(x)dx|<2^{-\nu_n}$.

4) Pour un ensemble de points quelconque M, CM désigne le complément de M pour l'intervalle $[a,b]$.

5) On dit qu'un système d'intervalles est élémentaire, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres.

α.3) On a $\sum_{m=0}^{n} \int_{CF_{n+1}} |r_m(x)|dx < 2^{-\nu_{n+1}}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

β) On a $F_n \subseteq F_{n+1}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ et $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = [a, b]$.

Puisqu'on a, pour toute suite fondamentale, $f_{2n} = f_{2n+1}$, on peut prendre pour $p_{2n}(x)$ et $r_{2n}(x)$ la fonction 0. Donc, nous convenons dorénavant que $p_{2n}(x) = r_{2n}(x) = 0$ pour tout n.

Lemme 1. *Pour toute suite fondamentale* $u = \{u_n\}$, $u_n = V(F_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *nous avons presque partout dans l'intervalle* $[a, b]$ $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} r_n(x)$, *où* $p_n(x)$, $r_n(x)$ *sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions* [*1*], [*2*] *et* [*3*].

Démonstration. Puisqu'on a mes $(F_n - F_{n+1}) = 0$ pour tout n[6] et qu'on a $\lim_{n\to\infty}$ (mes $([a, b] - F_n)) = 0$, il y a, pour presque tout $x \in [a, b]$, un nombre naturel $n_0(x)$ tel qu'on ait $x \in F_n$ pour tout $n > n_0(x)$ et ensuite qu'on ait d'après la condition [1], $r_n(x) = 0$ pour tout $n > n_0(x)$. Nous avons donc, pour tout $m > n_0(x)$, $f_m(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^{m-1} p_n(x) + \sum_{n=0}^{n_0(x)} r_n(x)$. De plus, on a déjà su que $f_m(x)$ tend vers une fonction presque partout.[7] On verra donc le résultat voulu.

Théorème 1. *Toute suite fondamentale qui jouit de la propriété* P' $u = \{u_n\}$, $u_n = V(F_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *permet de définir le nombre* $I[u]$[8] *comme une limite d'une suite des intégrales lebesguiennes*: $I[u] = \lim_{m\to\infty} \int_{F_m} f(x)dx$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Démonstration. Soit ε un nombre positif quelconque. Puisque $I[u] = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$, il y a un nombre naturel $n'(\varepsilon)$ tel que

$$\left| I[u] - \int_a^b f_n(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } n > n'(\varepsilon). \tag{1}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \int_{F_m} f_n(x)dx = \int_{F_m} f(x)dx$ pour tout F_m,[9] il y a un nombre naturel $n''(m, \varepsilon)$ tel que

$$\left| \int_{F_m} f(x)dx - \int_{F_m} f_n(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } n > n''(m, \varepsilon). \tag{2}$$

Soit n_0 un nombre naturel tel que $n_0 > \max\,(n'(\varepsilon), n''(m, \varepsilon), m)$. Soient $p_i(x)$, $r_i(x)$ $(i=0, 1, 2, \cdots)$ des fonctions en escalier satisfaisant à la condition α). On a alors, $\left| \int_a^b f_{n_0}(x)dx - \int_{F_m} f_{n_0}(x)dx \right| \leq \left| \int_{CF_m} f_0(x)dx \right|$

6) Voir K. Kunugi: Loc. cit.
7) Voir K. Kunugi: Loc. cit.
8) Voir K. Kunugi: Loc. cit.
9) Voir K. Kunugi: Loc. cit.

$+\sum_{i=0}^{n_0-1}\left|\int_{CF_m} p_i(x)dx\right|+\sum_{i=0}^{n_0-1}\left|\int_{CF_m} r_i(x)dx\right|\leq \max_x|f_0(x)|\cdot\mathrm{mes}(CF_m)+\sum_{i=0}^{m-1}\int_{CF_m}|p_i(x)|dx$ $+\sum_{i=m}^{n_0-1}\int_{CF_m}|p_i(x)|dx+\sum_{i=0}^{m-1}\int_{CF_m}|r_i(x)|dx+\sum_{i=m}^{n_0-1}\left|\int_{CF_m} r_i(x)dx\right|$. D'après la condition $\alpha.1$), on a $\sum_{i=0}^{m-1}\int_{CF_m}|p_i(x)|dx<2^{-\nu_m}$. D'après la condition [2], on a $\sum_{i=m}^{n_0-1}\int_{CF_m}|p_i(x)|dx<\sum_{i=m}^{n_0-1}2^{-\nu_i}<2^{-(\nu_m-2)}$. D'après la condition $\alpha.3$), on a $\sum_{i=0}^{m-1}\int_{CF_m}|r_i(x)|dx<2^{-\nu_m}$. Désignons par J_k $(k=1,2,\cdots)$ la suite des intervalles contenus dans $[a,b]$ contigus à l'ensemble fermé F_m. Puisqu'alors $F_i\cap J_k\neq 0$ $(k=1,2,\cdots)$ pour tout $i\geq m$, on a d'après la condition $\alpha.2$), $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{J_k} r_i(x)dx\right|\leq 2^{-\nu_i}$ et ensuite on a $\left|\int_{CF_m} r_i(x)dx\right|\leq 2^{-\nu_i}$. On a donc $\left|\int_a^b f_{n_0}(x)dx-\int_{F_m} f_{n_0}(x)dx\right|<\max_x|f_0(x)|\cdot\mathrm{mes}(CF_m)+2^{-\nu_m}+2^{-(\nu_m-2)}+2^{-\nu_m}+2^{-(\nu_m-2)}$. Conséquemment, il y a un nombre naturel $m_0(\varepsilon)$ tel qu'on ait pour tout $m\geq m_0(\varepsilon)$,

$$\left|\int_a^b f_{n_0}(x)dx-\int_{F_m} f_{n_0}(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Selon (1), (2) et (3), on voit que $\left|I[u]-\int_{F_m} f(x)dx\right|<\varepsilon$ pour tout $m\geq m_0(\varepsilon)$.

Lemme 2. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, *une suite fondamentale qui jouit de la propriété* P'. *Posons* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. *Alors, quel que soit le système élémentaire d'intervalles* κ_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$, *la condition* $\kappa_i\cap F_n\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,i_0)$ *entraîne*

$$\sum_{m=n}^{\infty}\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_{i=1}^{i_0}\kappa_i} f(x)dx\right|<\max|f_0(x)|\cdot\mathrm{mes}(CF_n)+2^{-(\nu_n-5)}.$$

Démonstration. Soient n un nombre naturel quelconque et κ_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ un système élémentaire d'intervalles quelconque tel que $\kappa_i\cap F_n\neq 0$ pour tout i. Soit m un nombre naturel tel que $m\geq n$. Selon le Lemme 1, on a $\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i\kappa_i} f(x)dx\right|\leq\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i\kappa_i} f_0(x)dx\right|$ $+\sum_{j=0}^{\infty}\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i\kappa_i} p_j(x)dx\right|+\sum_{j=0}^{\infty}\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i\kappa_i} r_j(x)dx\right|$.

De plus on a $\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} f_0(x)dx\right| \leq \max_x |f_0(x)|\cdot \text{mes}\,\{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i\}$,

et on a d'après les conditions α.1) et [2], $\sum_{j=0}^{\infty}\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} p_j(x)dx\right|$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} |p_j(x)|\,dx + \sum_{j=m}^{\infty}\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} |p_j(x)|\,dx \leq \sum_{j=0}^{m-1}\int_{CF_m} |p_j(x)|\,dx$$

$$+\sum_{j=m}^{\infty}\int_a^b |p_j(x)|\,dx < 2^{-\nu_m} + \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-\nu_j} \leq 2^{-\nu_m} + 2^{-(\nu_m-2)}.$$

Puisque, pour tout $j>m$, $r_j(x)=0$ si $x\in F_{m+1}$, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} r_j(x)dx\right| = \sum_{j=0}^{m-1}\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} r_j(x)dx\right| + \left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} r_m(x)dx\right|.$$

D'après la condition α.3), on a $\sum_{j=0}^{m-1}\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} r_j(x)dx\right| \leq \sum_{j=0}^{m-1}\int_{CF_m} |r_j(x)|\,dx$

$<2^{-\nu_m}$ et on a $\int_{CF_{m+1}} |r_m(x)|\,dx < 2^{-\nu_{m+1}}$.

Soit J_k $(k=1, 2,\cdots)$ la suite des intervalles contenus dans l'ensemble $\bigcup_i \kappa_i$ contigus à l'ensemble fermé $F_m\cap(\bigcup_i \kappa_i)$. Puisque $\kappa_i\cap F_n\neq 0$ pour tout i, et que la suite $\{F_m\}$ est monotone croissante, on a $\kappa_i\cap F_m\neq 0$ pour tout i. Par suite, $J_k\cap F_m\neq 0$ pour tout k. D'après la condition α.3), il en résulte que $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{J_k} r_m(x)dx\right| \leq 2^{-\nu_m}$. Donc, puisqu'on a $(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k - (\bigcup_i \kappa_i - F_{m+1})$, on voit que $\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} r_m(x)dx\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{J_k} r_m(x)dx\right|$

$$+\int_{CF_{m+1}} |r_m(x)|\,dx < 2^{-\nu_m} + 2^{-\nu_{m+1}} \leq 2^{-(\nu_m-1)}.$$

Conséquemment, on a pour tout $m\geq n$, $\left|\int_{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i} f(x)dx\right|$ $< \max_x |f_0(x)|\cdot\text{mes}\,\{(F_{m+1}-F_m)\cap\bigcup_i \kappa_i\} + 2^{-(\nu_m-3)}$. Il s'ensuit qu'on a le résultat voulu.

Nous avons aussitôt du Lemme 2 le

Théorème 2. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0, 1, 2,\cdots)$, *une suite fondamentale qui jouit de la propriété* P'. *Posons* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. *Alors, pour tout intervalle* κ *contenu dans* $[a, b]$, *il y a toujours la limite de la suite des intégrales* $\int_{\kappa\cap F_m} f(x)dx : \lim_{m\to\infty}\int_{\kappa\cap F_m} f(x)dx$.

Théorème 3. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *une suite fondamentale qui jouit de la propriété* P'. *Posons* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. *Alors, la fonction* $f(x)$ *est intégrable au sens de Denjoy et on a* $I[u]=(D)\int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. En vertu du Théorème 2, nous pouvons poser $I[\kappa, u]=\lim_{m\to\infty}\int_{\kappa \cap F_m} f(x)dx$ pour tout intervalle κ contenu $[a, b]$. Alors, on voit aussitôt que la fonction d'intervalle $I[\kappa, u]$ est fini-additive.

Posons $\alpha_n=\max_x |f_0(x)|\cdot \mathrm{mes}(CF_n)+2^{-(\nu_n-5)}$. Alors, $\{\alpha_n\}$ est une suite des nombres telle que $\alpha_n \downarrow 0$. Soit ε_j une suite des nombres quelconque telle que $\varepsilon_j \downarrow 0$. Soit $\{\alpha_{n_j}\}$ une suite partielle de $\{\alpha_n\}$ telle que $\alpha_{n_j}<\varepsilon_j$ pour tout j. Alors, la suite partielle $\{F_{n_j}\}$ de $\{F_n\}$ possède les propriétés suivantes: 1) Elle est une suite non-décroissante d'ensembles fermés de total $[a, b]$. 2) $f(x)$ est sommable sur tout F_{n_j}. 3) Pour un système élémentaire d'intervalles quelconque κ_i $(i=1,2,\cdots, i_0)$, si $\kappa_i \cap F_{n_j} \neq 0$ pour tout i, on a $\left|\sum_{i=1}^{i_0} I[\kappa_i, u]-\sum_{i=1}^{i_0}\int_{\kappa_i \cap F_{n_j}} f(x)dx\right| < \varepsilon_j$.

D'après la condition β), on a 1). Par la Note de Prof. K. Kunugi, on a déjà su la Proposition 2). Pour 3), on a

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0} I[\kappa_i, u]-\sum_{i=1}^{i_0}\int_{\kappa_i \cap F_{n_j}} f(x)dx\right|$$
$$=\left|\left\{\int_{\bigcup_i \kappa_i \cap F_{n_j}} f(x)dx+\sum_{m=n_j}^{\infty}\int_{\bigcup_i \kappa_i \cap (F_{m+1}-F_m)} f(x)dx\right\}-\int_{\bigcup_i \kappa_i \cap F_{n_j}} f(x)dx\right|$$
$$\leq \sum_{m=n_j}^{\infty}\left|\int_{\bigcup_i \kappa_i \cap (F_{m+1}-F_m)} f(x)dx\right|.$$

On a donc, en vertu du Lemme 3, $\sum_{i=1}^{i_0} I[\kappa_i, u]-\sum_{i=1}^{i_0}\int_{\kappa_i \cap F_{n_j}} f(x)dx$ $<\max_x |f_0(x)|\cdot \mathrm{mes}(CF_{n_j})+2^{-(\nu_{n_j}-5)}=\alpha_{n_j}<\varepsilon_j$.

Conséquemment, $f(x)$ est intégrable au sens de Denjoy et on a $I[[a, b], u]=(D)\int_a^b f(x)dx$.[10] Puisque, selon le Théorème 1, $I[u]=\lim_{m\to\infty}\int_{F_m} f(x)dx=I[[a, b], u]$, il résulte que $I[u]=(D)\int_a^b f(x)dx$.

Théorème 4. *Soit* $f(x)$ *une fonction intégrable au sens de Denjoy. Alors, il y a une suite fondamentale jouissant de la propriété* P' $u=\{u_n\}$, $u_n=v_n(f_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *telle qu'on ait* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ *presque*

10) Voir S. Enomoto: Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions I, Théorème 5, Osaka Math. J., **7**, 69-102 (1955).

partout dans l'intervalle $[a, b]$ *et qu'on ait* $I[u]=(D)\int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. Puisque la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Denjoy, il y a une suite non-décroissante d'ensembles fermés F_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ possédant les propriétés suivantes:[11]

1) On a $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n=[a, b]$ et $F_0 \neq 0$.

2) $f(x)$ est sommable sur tout F_n.

3) Pour un système élémentaire d'intervalles quelconque I_i $(i=1,2,\cdots, i_0)$, si $I_i \cap F_n \neq 0$ pour tout i, on a $\sum_{i=1}^{i_0}\left|(D)\int_{I_i} f(x)dx - \int_{I_i \cap F_n} f(x)dx\right| < 2^{-(2n+4)}$.

Posons $s(x)=C_{F_0}(x)$[12]$\cdot f(x)$ et $t_n(x)=C_{F_n-F_{n-1}}(x)\cdot f(x)$ pour tout $n=1, 2, \cdots$. Alors, on a, pour la fonction $s(x)$, une suite des fonctions en escalier $s_j(x)$ $(j=0, 1, 2, \cdots)$ telle qu'on ait presque partout $\lim_{j\to\infty} s_j(x)=s(x)$ et qu'on ait $\int_a^b |s(x)-s_j(x)|\,dx < 2^{-(2j+4)}$ pour tout j. Comme F_{n-1} est un ensemble fermé, on a, pour toute fonction $t_n(x)$, une suite des fonctions en escalier $t_j^n(x)$ $(j=1, 2, \cdots)$, qui s'annule pour tout x appartenant à F_{n-1} et telle qu'on ait presque partout $\lim_{j\to\infty} t_j^n(x)$ $=t_n(x)$ et qu'on ait $\int_b^b |t_n(x)-t_j^n(x)|\,dx < 2^{-(n+2j+4)}$ pour tout j.

Mais, nous pouvons voir de plus que l'on peut choisir, en utilisant la méthode d'induction, une suite non-décroissante d'ensembles fermés F_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ qui jouit, outre qu'elle jouit des propriétés 1), 2) et 3) ci-dessus, des propriétés suivantes:

4) Pour $n=0$, on a $\sum_{j=0}^{1}\int_{CF_1} |s_j(x)|\,dx < 2^{-4}$, et on a pour tout $n=1, 2, \cdots$,

$$\sum_{j=0}^{n+1}\int_{CF_{n+1}} |s_j(x)|\,dx + \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}\int_{CF_{n+1}} |t_j^m(x)|\,dx < 2^{-(2n+4)}.$$

5) On a $\mathrm{mes}(CF_n) < 2^{-(2n+1)}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

Posons maintenant, $F_{2n}^*=F_{2n+1}^*=F_n$ et $\nu_n=n$ pour tout $n=0,1,2,\cdots$. Posons $f_0(x)=f_1(x)=s_0(x)$ et $f_{2n}(x)=f_{2n+1}(x)=f_{2n-1}(x)+p_{2n-1}(x)+r_{2n-1}(x)$ pour tout $n=1, 2, \cdots$, où $p_1(x)=s_1(x)-s_0(x)$, $p_{2n+1}(x)=(s_{n+1}(x)-s_n(x))+\sum_{m=1}^{n}(t_{n+1}^m(x)-t_n^m(x))$ pour tout $n=1, 2, \cdots$ et $r_{2n+1}(x)=t_{n+1}^{n+1}(x)$ pour tout $n=0, 1, 2, \cdots$. Alors, on voit que $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n^*, \nu_n; f_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, est une suite des voisinages qui jouit des propriétés voulues dans ce théorème. Cette démonstration sera donnée dans la note prochaine.

11) Voir S. Enomoto: Loc. cit., Théorème 1.

12) Pour un ensemble des points quelconque M, $C_M(x)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble M.