169. Sur les Groupes Factorisables par Deux 2-Groupes Cycliques. II

(Cas où leur groupe des commutateurs n'est pas cyclique)

Par Noboru Itô et Akiko Ôhara

(Comm. by K. SHODA, M.J.A., Dec. 13, 1956)

1. Nous allons considérer la structure d'un groupe factorisable G par deux 2-groupes cycliques A, B dont le groupe des commutateurs G' n'est pas cyclique. Désignons par a, b deux générateurs de A, B respectivement. Soient $2^{\alpha}, 2^{\beta}$ les ordres de A, B respectivement.

Théorème 1. *Soit G un groupe factorisable par deux 2-groupes cycliques A, B. Si son groupe des commutateurs G' n'est pas cyclique, G' est produit de $\{(a, b)\}$ et A_d ou de $\{(a, b)\}$ et B_d, où $\{(a, b)\}$ est un sous-groupe cyclique engendré par un commutateur (a, b), et où A_d, B_d sont des sous-groupes propres de A, B respectivement tels que A_d, B_d sont des sous-groupes distingués de G.*

Désignons par A_e un maximal sous-groupe propre de A tel que A_e est un sous-groupe distingué de G [1]. Soit $G'\frown A_e=A_d$, (si $G'\frown A_e=1$, prenons $B_d=G'\frown B_e$) et soit d son générateur. Il est clair que $G'\supseteqq\{(a, b)\}A_d$. Comme G' est engendré par tous les éléments de la forme (a^i, b^j) [2], pour montrer que $G'\subseteqq\{(a, b)\}A_d$ il suffit de montrer que $(a^i, b^j)\in\{(a, b)\}A_d$, où $1\leqq i\leqq 2^{\alpha}$, $1\leqq j\leqq 2^{\beta}$. Nous le démontrons par récurrence doublée sur i, j. Il est évident pour $i=1$, $j=1$. Supposons que $(a, b^j)\in\{(a, b)\}A_d$ et que $(a, b^j)=(a, b)^f d^g$. Alors on a, en considérant que A_d est un sous-groupe distingué de G,

$$\begin{aligned}(a, b^{j+1})&=ab^{j+1}a^{-1}b^{-j-1}\\&=(a, b)b(a, b^j)b^{-1}\\&=(a, b)b(a, b)^f d^g b^{-1}\\&=(a, b)\{b(a, b)b^{-1}\}^f d^{g'}\\&=(a, b)\{(a, b)^h d^k\}^f d^{g'}\\&=(a, b)^{f'}d^{g''}.\end{aligned}$$

Cela signifie que $(a, b^{j+1})\in\{(a, b)\}A_d$ et alors que $(a, b^n)\in\{(a, b)\}A_d$ pour un nombre arbitraire n. (Il est évident que $b(a, b)b^{-1}=(a, b)^{-1}(a, b^2)$ et $a(a, b)a^{-1}=(a^2, b)(a, b)^{-1}$.) Supposons que $(a^i, b^n)\in\{(a, b)\}A_d$ et $(a^i, b^n)=(a, b)^l d^m$. On a

$$\begin{aligned}(a^{i+1}, b^n)&=a^{i+1}b^n a^{-i-1}b^{-n}\\&=a(a^i, b^n)a^{-1}(a, b^n)\\&=a(a, b)^l d^m a^{-1}(a, b)^h d^k\\&=\{a(a, b)a^{-1}\}^l d^{m'}(a, b)^h d^k\\&=\{(a, b)^{h'}d^{k'}\}^l d^{m'}(a, b)^h d^k\\&=(a, b)^{l'}d^{m''}.\end{aligned}$$

Donc pour tous les nombres i, j, on a $(a^i, b^j) \in \{(a, b)\} A_d$. Ce qui montre que $G' = \{(a, b)\} A_d$, c.q.f.d.

Remarque. On pourra voir que le théorème 1 a essentiellement la même signification que le théorème démontré par N. Itô [1]: *soit G un groupe factorisable par deux 2-groupes cycliques A, B tels que $A \frown B = 1$. Lorsque le centre de G est cyclique, le groupe des commutateurs G' de G est aussi cyclique.*

Théorème 2. *Soit G un groupe factorisable par deux 2-groupes cycliques A, B. Si son groupe des commutateurs G' n'est pas cyclique, le groupe quotient G/G' est un groupe abélien du type* $(2^\gamma, 2)$.

On peut comprendre G' sous la forme $G' = \{(a, b)\} A_d$, d'après le Théorème 1. Désignons par d un générateur de A_d.

a) Cas où $d^2 = 1 : G' = \{(a, b)\} \times A_d$.

(1) $(a, b)^2 = 1$.

S'il existe un groupe quotient cyclique N/A_d tel que $N/A_d \supsetneqq (G/A_d)'$, on peut trouver un élément n dans le groupe N tel que $n^2 \equiv (a, b)\ (A_d)$. Alors on a $n^4 \equiv 1\ (A_d)$. Si $n^4 = d$, le sous-groupe cyclique $\{n\}$ contient A_d et $\{(a, b)\}$ qui ont l'ordre 2 et on aurait $A_d = \{(a, b)\}$. Donc, on a $n^4 = 1$. Comme $\{n\} A_d$ est un sous-groupe distingué de G, pour un élément arbitraire g de G, on a $gng^{-1} = n^i d$ ou $gng^{-1} = n^i$, avec $i = 1$ ou $i = 3$. On a alors $gn^2g^{-1} = n^2$, c'est-à-dire n^2 appartient au centre de G. D'autre part, A_d est contenu dans le centre de G. D'où on conclut que (a, b) appartient au centre de G et que $(a^2, b) = (a, b^2) = 1$. Comme le groupe des commutateurs G' est engendré par tous les commutateurs (a^i, b^j) où $1 \leqq i \leqq 2^\alpha$, $1 \leqq j \leqq 2^\beta$, on a les relations: $(a^{2m}, b^{2l}) = 1$, $(a^{2m}, b^{2l+1}) = 1$, $(a^{2m+1}, b^{2l}) = 1$, $(a^{2m+1}, b^{2l+1}) = (a^{2m}, b^{2l+1})(a, b^{2l})(a, b) = (a, b)$. Ce qui est contraire à l'hypothèse du théorème. Donc, il n'existe pas de groupe quotient cyclique N/A_d tel que $N/A_d \supsetneqq (G/A_d)'$. Comme $(G/A_d)' = G'A_d/A_d = G'/A_d \cong \{(a, b)\}$, l'ordre de $(G/A_d)'$ est égal à 2. D'après le Théorème 3 dans notre mémoire précédent $G/A_d \big/ (G/A_d)'$ est un groupe abélien du type $(2^\gamma, 2)$. Puisque on a $G/A_d \big/ (G/A_d)' = G/A_d \big/ G'/A_d \cong G/G'$, G/G' est aussi un groupe abélien du type $(2^\gamma, 2)$.

(2) $(a, b)^2 \neq 1$.

Pour un élément arbitraire g de G, on a $g(a, b)g^{-1} = (a, b)^l d$ ou $g(a, b)g^{-1} = (a, b)^l$. Il en réduit que $g(a, b)^2 g^{-1} = (a, b)^{2l}$. Donc $\{(a, b)^2\}$ est un sous-groupe distingué de G. On a $(G/\{(a, b)^2\})' = G'\{(a, b)^2\} \big/ \{(a, b)^2\} = G' \big/ \{(a, b)^2\} \cong \overline{\{(a, b)\}} \times A_d$ où $\overline{\{(a, b)\}}$ est d'ordre 2. D'après le cas (1) le théorème est vrai pour le groupe quotient $G/\{(a, b)^2\}$, c'est-à-dire que $G/\{(a, b)^2\} \big/ (G/\{(a, b)^2\})'$ est un groupe abélien du type $(2^\gamma, 2)$. Comme on a $G/\{(a, b)^2\} \big/ (G/\{(a, b)^2\})' = G/\{(a, b)^2\} \big/ G'/\{(a, b)^2\} \cong G/G'$, G/G' est aussi un groupe abélien du type $(2^\gamma, 2)$.

b) Cas où $d^2 \neq 1$.

On peut vérifier aisément qu'un groupe $\{d^2\}$ engendré par l'élément d^2 est un sous-groupe distingué de G. D'après que $(G/\{d^2\})' = G'\{d^2\} \big/ \{d^2\} = G'/\{d^2\} \cong \{(a, b)\} \times \bar{A}_d$, où $\bar{A}_d$ a l'ordre 2, le théorème est établi pour le groupe quotient $G/\{d^2\}$ selon le cas a): $G/\{d^2\} \big/ (G/\{d^2\})'$ est un groupe abélien du type $(2^{\gamma}, 2)$. On a $G/\{d^2\} \big/ (G/\{d^2\})' = G/\{d^2\} \big/ G'/\{d^2\} \cong G/G'$. Donc, G/G' est aussi un groupe abélien du type $(2^{\gamma}, 2)$, c.q.f.d.

2. Nous pouvons vérifier que si l'ordre de B est au plus égal à 4 G' est cyclique.

Nous arrivons à la conclusion suivante. Soit $\mathfrak{A}$ un groupe abélien du type $(2^m, 2^n)$ et soit $\mathfrak{B}$ un groupe abélien du type $(2^d, 2)$. C'est la solution unique et complète pour résoudre le problème d'un groupe factorisable par ses deux 2-groupes cycliques, où l'on demande de construire tous les groupes $\mathfrak{G}$ tels que $\mathfrak{G}' \cong \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}' \cong \mathfrak{B}$. Il ne faudra pas supposer que deux sous-groupes de facteur n'ont pas d'élément commun.

Références

[1] N. Itô: Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen, Pub. Math., **4**, 517–520 (1956).

[2] A. Ōhara: Note on commutator subgroups of factorisable groups, Proc. Japan Acad., **31**, 612–614 (1955).