9. *Les Relations entre Certains Principes en Théorie du Potentiel*

Par Makoto OHTSUKA
Institut de Mathématiques, Université de Nagoya
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1957)

L'étude du potentiel dans un espace localement compact est courant dans la théorie du potentiel,[1] et un principe qui est une modification du principe du maximum de Ugaheri et le principe de continuité y jouent le rôle important.[2] Nous verrons dans cette note les relations entre eux et certains autres principes.

L'espace Ω dont il s'agira sera un espace localement compact, et toutes les mesures μ seront positives finies et à support compact dans Ω; le support de μ sera noté S_μ. On dira que μ est *portée* par un ensemble X si $S_\mu \subset X$. Un *noyau* $\Phi(P, Q)$ est une fonction numérique continue définie dans $\Omega\times\Omega$ telle que $-\infty<\Phi(P,Q)\leqq+\infty$, qui est finie hors de la diagonale de $\Omega\times\Omega$. Le *potentiel* (droit) engendré par μ est défini par

$$U^\mu(P)=\int_\Omega \Phi(P, Q)\,d\mu(Q).$$

(i) *Principe du maximum de Frostman:*[3] Pour toute μ on a

$$\sup_{P\in\Omega} U^\mu(P)\leqq \sup_{P\in S_\mu} U^\mu(P).$$

(ii) *Principe du maximum de Ugaheri:* Il existe une constante $c\geqq 0$ telle que

$$\sup_{P\in\Omega} U^\mu(P)\leqq c\sup_{P\in S_\mu} U^\mu(P)$$

pour toute μ.

(iii) *Principe du maximum de Ugaheri faible:*[4] Pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe une constante $c=c(K)\geqq 0$ telle que

$$\sup_{P\in\Omega} U^\mu(P)\leqq c\sup_{P\in S_\mu} U^\mu(P)$$

pour toute μ portée par K.

---

1) Voir Choquet et Deny [3, 4], Ohtsuka [6], Brelot et Choquet [1]. L'auteur a annoncé certains résultats sur ce sujet aux réunions de la Société Mathématique du Japon en automne 1955 et 1956, chaque fois à Kyoto.

2) Voir Choquet [2] et Ohtsuka [7]. L'auteur a utilisé les principes (iii) et (ix) définis ci-dessous au debut de son étude général du potentiel dans un espace localement compact mais il a trouvé après que [2] a eu été publié, que (iii) peut être remplacé par (iv) qui est plus faible. Dans un mémoire sous préparation il fera l'usage aussi de (vi).

3) C'est appelé autrement le premier principe du maximum.

4) Donné dans [7].

(iv) *Principe du maximum dilaté satisfait sur tout compact:*[5] Pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe une constante $c=c(K)\geqq 0$ telle que

$$\sup_{P\in K} U^{\mu}(P)\leqq c\sup_{P\in S_{\mu}} U^{\mu}(P)$$

pour toute μ portée par K.

(v) *Principe de limitation supérieure:*[4] Le fait que $\sup_{P\in S_{\mu}} U^{\mu}(P)<+\infty$ entraîne que $\sup_{P\in\Omega} U^{\mu}(P)<+\infty$.

(vi) *Principe de limitation supérieure faible:* Si la restriction de $U^{\mu}(P)$ à S_{μ} est continue et finie, $U^{\mu}(P)$ est borné supérieurement dans tout l'espace.

(vii) *Principe de limitation supérieure satisfait sur tout compact:* Pour tout compact K et pour toute μ portée par K, $\sup_{P\in S_{\mu}} U^{\mu}(P)<+\infty$ entraîne $\sup_{P\in K} U^{\mu}(P)<+\infty$.

(viii) *Principe de limitation supérieure faible satisfait sur tout compact:* Pour tout compact K et pour toute μ portée par K, si la restriction de $U^{\mu}(P)$ à S_{μ} est continue et finie, $U^{\mu}(P)$ est borné supérieurement sur K.

(ix) *Principe de continuité:*[6] Si la restriction de $U^{\mu}(P)$ à S_{μ} est continue et finie, $U^{\mu}(P)$ est continu et fini dans tout l'espace.

Théorème

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{(v)} \arrow[rr, shift left] \arrow[dl, shift left, "/" marking] \arrow[dr, shift left, "/" marking] & & \text{(vi)} \arrow[ll, shift left, "(\;)" description] \arrow[dr, shift left] \arrow[dl, shift left, "/" marking] & & & \\
\text{(i)} \arrow[r, shift left] & \text{(ii)} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[r, shift left] & \text{(iii)} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left] \arrow[drr, shift left] & & & & \text{(vii)} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[dll, shift left, "/" marking] \arrow[r, shift left] & \text{(viii)} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & \text{(ix)}, \arrow[l, shift left] \\
 & & & & \text{(iv)} \arrow[ull, shift left, "/" marking] \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left, "/" marking] \arrow[urr, shift left] & & & &
\end{tikzcd}$$

où $(\leftarrow)$ *exprime que cette relation est vraie si* $\inf_{P,Q\in\Omega}\Phi(P,Q)>-\infty$.[7]

Voyons ceux qui sont déjà connus. Choquet [2] a établi (iv) $\rightleftarrows$ (ix)[8] et l'auteur [7] a montré (iii) $\rightleftarrows$ (v). Il est évident que (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) $\to$ (iv), (v) $\to$ (vi) $\to$ (viii), (vii) $\to$ (viii), (ix) $\to$ (viii). L'exemple dans n° 3 de [7] établit (v) $\not\to$ (iv);[9] alors (v) $\not\to$ (ii) est une conséquence de cette relation et de (ii) $\to$ (iv).

L'exemple suivant établira (i) $\not\leftarrow$ (ii):[10] Supposons que Ω consiste en intervalle $[0,1]$ et un point P_0, et posons $\Phi(P,Q)=\log 1/\overline{PQ}$ si

5) Donné dans [2].

6) Un noyau qui satisfait à ce principe est appelé *régulier* dans [2].

7) La question sur la relation dans le cas général reste ouverte.

8) Il n'a demandé que la semi-continuité inférieure du noyau en diagonale dans $\Omega\times\Omega$, mais il me semble que la continuité est nécessaire comme l'exemple suivant indique: dans le plan ordinaire posons $\Phi(0,0)=1$ et $=2$ ailleurs; alors (iv) est satisfait mais le potentiel engendré par la masse-unité placée à l'origine est y discontinu.

9) Alors (viii) $\not\to$ (iv) est une conséquence de (v) $\to$ (vi) $\to$ (viii). D'autre part (iv) $\to$ (viii) est évident et ainsi le résultat (iv) $\rightleftarrows$ (ix) de Choquet cité ci-dessus est obtenu si l'équivalence (viii) $\rightleftarrows$ (ix) est vraie. Celle-ci sera en effet établie quelques lignes d'après.

10) Exemple 2 donné à p. 77 de [5] aussi en sert.

$P, Q \in [0,1]$, $\Phi(P_0, P_0) = +\infty$ et $\Phi(P_0, P) = \Phi(P, P_0) = a > \log 4$ pour tout $P \in [0,1]$. Alors si μ_0 est la répartition d'équilibre de masse-unité sur $[0,1]$, $U^{\mu_0}(P) = \log 4$ partout sur $[0,1]$, mais $U^{\mu_0}(P_0) = a > \log 4$. Ainsi (i) n'est pas satisfait. D'autre part, pour toute mesure μ portée par $[0,1]$ on a

$$\sup_{P \in \Omega} U^{\mu}(P) \leqq a \sup_{P \in S_{\mu}} U^{\mu}(P),$$

et donc (ii) est satisfait.

Pour établir (ii) $\nleftarrow$ (iii), prenons une infinité d'intervalles $\{I_n\}$ dont la longueur est un et prenons d'ailleurs des points $\{P_n\}$. Nous posons $\Phi(P, Q) = \log 1/\overline{PQ}$ si P et Q appartiennent à même I_n, $\Phi(P_n, P_n) = +\infty$, $\Phi(P_n, P) = \Phi(P, P_n) = a_n$ si $P \in I_n$, a_n étant un nombre positif fini qui tend vers $+\infty$ avec n, et $\Phi(P, Q) = \Phi(Q, P) = 1$ si ou bien $P \in I_n$ et $Q \in I_m$ $(n \neq m)$ ou bien $P = P_n$ et $Q \in I_m$ $(n \neq m)$ ou bien $P = P_n$ et $Q = P_m$ $(n \neq m)$. Alors (ii) n'est pas satisfait mais (iii) est satisfait. Ainsi on voit que (ii) $\nleftarrow$ (iii).

Considérons le noyau $\Phi(P, Q) = 1 + \overline{PQ}$ dans le plan ordinaire; alors tout potentiel avec ce noyau est continu et fini dans tout l'espace et tend vers $+\infty$ lorsque P tend vers le point à l'infini. Lorsque $S_{\mu} \subset K$,

$$\sup_{P \in K} \int \Phi(P, Q) d\mu(Q) \leqq (1 + \text{diam } K)\mu(\Omega) \leqq (1 + \text{diam } K) \sup_{P \in S_{\mu}} \int \Phi(P, Q) d\mu(Q).$$

Ainsi ce noyau satisfait à (iv) mais non à (vi); c'est-à-dire (iv) $\nrightarrow$ (vi). Alors (iv) $\nrightarrow$ (v), (iv) $\nrightarrow$ (iii), (ix) $\nrightarrow$ (vi) seront conclus si on tient compte des relations déjà établies.

Encore il reste à démontrer (vi) $(\rightarrow)$ (v), (viii) $\rightarrow$ (vii), (viii) $\rightarrow$ (ix). Si on examine la démonstration du Théorème 1 dans [7], on trouvera facilement qu'elle est valide presque telle quelle pour prouver (viii) $\rightarrow$ (ix). Puis, puisque $\inf\limits_{P, Q \in K} \Phi(P, Q) > -\infty$, la démonstration de (vi) $(\rightarrow)$ (v) est valable pour (viii) $\rightarrow$ (vii). Donc nous allons démontrer seulement (vi) $(\rightarrow)$ (v): Si $\inf\limits_{P, Q \in \Omega} \Phi(P, Q) = m < 0$, on pose $\overline{\Phi}(P, Q) = \Phi(P, Q) - m$. Admettons que $U^{\mu}(P)$ soit borné sur S_{μ}. Alors $\overline{U}^{\mu}(P) \equiv \int \overline{\Phi}(P, Q)\, d\mu(Q)$ $= U^{\mu}(P) - m\mu(\Omega)$ est borné sur S_{μ}. Comme $U^{\mu}(P) \leqq \overline{U}^{\mu}(P)$, il suffira de démontrer (vi) $\rightarrow$ (v) sous l'hypothèse $\Phi(P, Q) \geqq 0$ dans $\Omega \times \Omega$.

Supposons qu'il existe $U^{\mu}(P)$ tel qu'il soit borné, soit <1, sur S_{μ} mais ne soit pas borné dans Ω; il existe $\{P_n\} \subset \Omega$ tels que $U^{\mu}(P_n) \rightarrow +\infty$ avec n. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un sous-compact $K_{\varepsilon} \subset S_{\mu}$ tel que $\mu(S_{\mu} - K_{\varepsilon}) < \varepsilon$ et que la restriction de $U^{\mu}(P)$ à K_{ε} soit continue. Alors la restriction à K_{ε} du potentiel engendré par la restriction μ_{ε} de μ à K_{ε} est continue et finie et donc $U^{\mu_{\varepsilon}}(P)$ est continu et fini dans Ω d'après la relation (viii) $\rightarrow$ (ix) mentionnée ci-dessus. Il existe P_{n_k} tel que $U^{\mu}(P_{n_k}) > k\ 2^{k+1}$ et on y a

$$0 \leqq U^{\mu}(P_{n_k}) - U^{\mu_\varepsilon}(P_{n_k}) \leqq \max_{Q \in S_\mu} \Phi(P_{n_k}, Q) \cdot \mu(S_\mu - K_\varepsilon) < \varepsilon \max_{Q \in S_\mu} \Phi(P_{n_k}, Q).$$

Donc si ε est assez petit,

$$U^{\mu_\varepsilon}(P_{n_k}) > U^{\mu}(P_{n_k})/2 > k\, 2^k;$$

divisons une telle μ_ε par 2^k et la désignons par ν_k. Alors $U^{\nu_k}(P)$ est continu dans Ω, $U^{\nu_k}(P) < 1/2^k$ sur S_μ et $U^{\mu_k}(P_{n_k}) > k$. Si on pose $\nu = \sum_k \nu_k$, la restriction de $U^{\nu}(P)$ à $S_\nu \subset S_\mu$ est continue et finie mais

$$U^{\nu}(P_{n_k}) \geqq U^{\nu_k}(P_{n_k}) > k,$$

qui est en contradiction avec (vi). Ainsi la relation (vi) $(\rightarrow)$ (v) est établie et tous sont maintenant démontrés.

Références

[1] M. Brelot et G. Choquet: Le théorème de convergence en théorie du potentiel (à paraître).

[2] G. Choquet: Les noyaux réguliers en théorie du potentiel, C. R. Acad. Sci., Paris, **243**, 635–638 (1956).

[3] G. Choquet et J. Deny: Aspects linéaires de la théorie du potentiel. I. Étude des modéles finis, ibid., **242**, 222–225 (1956).

[4] G. Choquet et J. Deny: Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Théorème de dualité et applications, ibid., **243**, 764–767 (1956).

[5] K. Kunugui: Étude sur la théorie du potentiel généralisé, Osaka Math. J., **2**, 63–103 (1950).

[6] M. Ohtsuka: Sur un espace complet de mesures positives dans la théorie du potentiel, Proc. Japan Acad., **32**, 311–313 (1956).

[7] M. Ohtsuka: Sur un théorème de M. Kishi, ibid., **32**, 722–725 (1956).