33. *Eine Verschlingungsinvariante*

Von Joseph WEIER

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1958)

Seien P eine dreidimensionale und Q eine zweidimensionale orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit, f eine stetige Abbildung von P in Q und ε eine positive Zahl. Dann existiert eine zu f homotope Abbildung f von P in Q mit $d(f, f')<\varepsilon$ und der Eigenschaft, dass die Menge aller Punkte p aus P mit $f(p)=f'(P)$ ein endliches euklidisches Polyeder A einer Dimension ≤ 1 ist. Wenn $\dim A<1$, so sei die "Verschlingungszahl" von f gleich Null. Hierauf wollen wir weiterhin voraussetzen, dass $\dim A=1$, und es seien $A_1, A_2,\cdots$ die Komponenten von A.

Wir fassen nun zunächst die A_i in Klassen zusammen: Es mögen A_j und A_k zur gleichen Klasse gehoren, wenn eine in P gelegene Kurve $(a_\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ existiert mit $a_0\in A_j$, $a_1\in A_k$ derart, dass die geschlossene Kurve

$$(f(a_\tau),\ 0\leq\tau\leq 1,\quad f'(a_\tau),\ 1\geq\tau\geq 0)$$

innerhalb Q nullhomolog ist. Offenbar ist diese Erklärung reflexiv, symmetrisch und transitiv. Alsdann ordnen wir die A_i so in eine Folge

$$A_1^i,\ i=1,2,\cdots,\quad A_2^i,\ i=1,2,\cdots,\ \cdots,$$

dass die $A_k^1, A_k^2,\cdots$ für jedes k eine Klasse bilden. Für alle k sei B_k das Polyeder $\bigcup_i A_k^i$. Weiter bedeute C_k eine simpliziale Zerlegung von B_k. Wenn $\dim C_k=0$, so sei $z_k=0$. Sonst seien $D_1, D_2,\cdots$ die 1-Simplexe von C_k, ferner d_i eine Orientierung von D_i und γ_i der unten definierte Grad von d_i bezüglich (f, f'). Dann ist die ganzzählige 1-Kette

$$\sum\gamma_i d_i$$

ein ganzzähliger Zyklus z_k.

Wenn alle z_k inbezug auf Pberanden, so sei die "Verschlingungszahl" von f Null. Ebenso sei die "Verschlingungszahl" von f Null, wenn keiner der Zyklen z_k bezüglich P berandet.

Hierauf kann man annehmen, es existiere eine naturliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass z_k für $k\leq n$ berandet und für $k>n$ nicht berandet. Wir setzen

$$z=\textstyle\sum_{k\leq n} z_k \quad\text{und}\quad z=\sum_{k>n} z_k.$$

Alsdann heisse die Gesamtheit $\zeta_1, \zeta_2,\cdots$ der bezüglich P gebildeten Verschlingungszahlen von z und z' der "*Verschlingungstyp*" von f. *Dieser letztere Typ ist homotpieinvariant*, näherhin: wenn f^* eine zu

f homotope Abbildung von P in Q, so kann man die den Verschlingungstyp von f^* bildenden ganzen Zahlen derart in eine Folge $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \cdots$ ordnen, dass

$$\zeta_i = \zeta_i^* \quad \text{für alle } i.$$

Gibt man die Voraussetzung der Orientierbarkeit von P und Q auf, so gelangt man zu einem *Verschlingungstyp modulo* 2. Inwiefern sich die Dimensionspaare $(2r-1, r)$ mit $r>2$, für die sich gleichfalls ein Verschlingungstyp definieren lässt, von dem Dimensionspaare $(3, 2)$ unterscheiden, werde ich bei anderer Gelegenheit auseinandersetzen. Verbleibt, den obigen Grad zu definieren.

Hierzu seien S ein offenes 3-Simplex, T ein offenes 2-Simplex, U ein offenes 1-Simplex in S, ferner S^*, T^*, U^* beziehungsweise eine Orientierung von S, T, U und g, g' stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in $\overline{T}$. Die Menge aller Punkte p aus $\overline{S}$ mit $g(p)=g'(p)$ sei gleich $\overline{U}$. Es bedeute a einen Punkt aus U und V eine 2-Simplex mit $a \in V \subset S$ und $\overline{U} \cdot \overline{V} = a$. Weiter seien V^* jene Orientierung von V, die zusammen mit U^* die Orientierung S^* liefert; und $h(P)$ für alle Punkte p aus $\overline{V} - V$ die Projektion von $g(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g'(p)$. Dann ist der Brouwersche Grad der Abbildung $h: \overline{V} - V \rightarrow \overline{T} - T$ der "Grad" von U^* bezüglich (S^*, T^*, g, g'). Sind nunmehr P^* eine bestimmte Orientierung von P und Q^* eine solche von Q, so ist der oben in Rede stehende Grad von d_i bezüglich (f, f') näherhin der Grad bezüglich (P^*, Q^*, f, f').

Wie sich der oben erklärte Verschlingungstyp abwandeln lässt, um seine Verwandtschaft mit der Hopfschen Zahl deutlich zu machen, werde ich an anderer Stelle darlegen.