99. *Sur les Topologies Compatibles avec la Structure d'une Algèbre*

Par Shouro KASAHARA
Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1958)

Un ensemble E muni d'une structure d'algèbre[1] et d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel[2] de E est appelé *algèbre topologique* si les applications $x\to xa$, $x\to ax$ de E dans E sont continues pour tout $a\in E$. Soit E une algèbre munie d'une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel. On dit qu'une partie A de E est *hyperbornée à gauche* (resp. *hyperbornée à droite*) si pour tout voisinage U de 0 dans E, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que l'on ait $VA\subseteq U$ (resp. $AV\subseteq U$). Une partie de E qui est à la fois hyperbornée à gauche et hyperbornée à droite est appelée *hyperbornée*.

Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E'; nous traitons, dans cette note, le problème de la compatibilité avec la structure d'algèbre de E des topologies compatibles avec la dualité entre E et E', et de la compatibilité avec la dualité des topologies à gauche et topologies à droite.

Signalons d'abord le

LEMME 1. *Si E est une algèbre topologique localement convexe séparée, E est aussi une algèbre topologique pour la topologie faible $\sigma(E,E')$, où E' est le dual de E.*

La démonstration résulte immédiatement de la Proposition 6 de [2, p. 103]. De plus, en vertu de la Proposition 7 de [2, p. 104], on obtient le

LEMME 2. *Soient E une algèbre et à la fois espace[3] localement convexe séparé, E' son dual. Si la topologie de E est identique à la topologie de Mackey $\tau(E,E')$, pour que E soit une algèbre topologique il faut et il suffit que l'algèbre E munie de la topologie faible $\sigma(E,E')$ soit une algèbre topologique.*

COROLLAIRE. *Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E'. Pour que l'algèbre E munie de la topologie faible $\sigma(E,E')$ soit une algèbre topologique il faut et il suffit que E soit une algèbre topologique pour la topologie de Mackey $\tau(E,E')$.*

En conséquence, on peut conclure:

---

1) Dans cette note, toutes les algèbres et tous les espaces vectoriels considérés ont pour corps des scalaires K le corps des nombres complexes. Tous les résultats sont valables aussi bien lorsque K est le corps des nombres réels.

2) De façon générale, nous suivons la terminologie de N. Bourbaki [1] et [2].

3) Espace vectoriel.

PROPOSITION 1. *Soient E une algèbre et à la fois espace localement convexe séparé, E' son dual. On suppose que la topologie de E est identique à la topologie de Mackey $\tau(E, E')$. Alors, pour que E soit une algèbre topologique il faut et il suffit que E soit une algèbre topologique pour une topologie compatible avec la dualité entre E et E'.*

On peut démontrer la proposition suivante.[4]

PROPOSITION 2. *Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E'. Pour que l'algèbre E munie de la topologie faible $\sigma(E, E')$ soit une algèbre topologique il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$ et tout $x' \in E'$, il existe un sous-espace vectoriel faiblement fermé[5] $F \subseteq E$ de codimension finie tel que $xF \subseteq H$ et $Fx \subseteq H$, où H est le noyau de x'.*

De cette proposition, on obtient les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. *Si E est une algèbre topologique localement convexe séparée, elle satisfait à la condition:*

($*$) *Pour tout $x \in E$ et pour toute forme linéaire continue x' sur E, il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \subseteq E$ de codimension finie tel que $xF \subseteq H$ et $Fx \subseteq H$, où H est le noyau de x'.*

COROLLAIRE 2. *Soient E une algèbre et à la fois espace localement convexe séparé, E' son dual. On suppose que la topologie de E est identique à la topologie de Mackey $\tau(E, E')$. Alors, pour que E soit une algèbre topologique il faut et il suffit que la condition ($*$) soit vérifiée.*

En particulier:

COROLLAIRE 3. *Soit E une algèbre et à la fois espace de Fréchet. Pour que l'application $(x, y) \to xy$ de $E \times E$ dans E soit continue il faut et il suffit que la condition ($*$) soit vérifiée.*

Or, la Proposition 4 résulte aussitôt de la

PROPOSITION 3. *Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E'. Pour qu'une partie B de E soit hyperbornée à gauche (resp. hyperbornée à droite) pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ il faut et il suffit que xB (resp. Bx) soit faiblement borné[6] pour tout $x \in E$ et qu'il existe, pour tout $x' \in E'$, un sous-espace vectoriel faiblement fermé $F \subseteq E$ de codimension finie tel que $FB \subseteq H$ (resp. $BF \subseteq H$), où H est le noyau de x'.*

Nous allons maintenant démontrer la Proposition 3. Pour démontrer la nécessité, supposons que B soit faiblement hyperborné à gauche. Alors, pour tout $x' \in E'$, il existe $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n \in E'$ tels que $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)^\circ B \subseteq (x')^\circ$. On voit aisément que l'ensemble F des $x \in E$ satisfaisant aux equations $\langle x, x'_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, est un sous-espace

4) M. S. Warner [4] a donné une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $(x, y) \to xy$ de $E \times E$ dans E soit continue pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. La proposition présente est contenue implicitement dans sa démonstration.

5) Fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

6) Borné pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

vectoriel faiblement fermé de codimension finie. Si $x \in F$, λx étant un point de F pour tout nombre λ, xB est contenu dans le noyau de x', d'où $FB \subseteq H$. D'autre part, quel que soit $x \in E$, on peut trouver un nombre λ tel que $\lambda x \in (x'_1, x'_2, \cdots, x'_m)^\circ$, et par suite xB est faiblement borné.

Réciproquement, supposons que la condition de l'énoncé soit satisfaite. Pour tout $x' \in E'$, il existe donc un sous-espace vectoriel faiblement fermé $F \subseteq E$ de codimension finie tel que $FB \subseteq H$, où H est le noyau de x'. Désignons par φ et par ψ les applications canoniques de E sur E/H et de E sur E/F respectivement. Soit $b \in B$; comme $x-y \in F$ entraîne $xb-yb=(x-y)b \in H$, $\psi(x) \rightarrow \varphi(xb)$ est une application de E/F dans E/H. Comme aisément vu, cette application est linéaire, et E/F étant de dimension finie, elle est continue. Ainsi, l'ensemble M des applications $\psi(x) \rightarrow \varphi(xb)$, où b parcourt B, est une partie d'espace $\mathcal{L}(E/F, E/H)$ des applications linéaires (continues) de E/F dans E/H. Mais, par l'hypothèse, l'ensemble xB est faiblement borné pour tout $x \in E$, et par suite $\varphi(xB)$ est aussi borné dans E/H, c'est-à-dire, M est une partie bornée de $\mathcal{L}(E/F, E/H)$ pour la topologie de la convergence simple. Il résulte donc du théorème de Banach-Steinhaus que la partie M est équicontinue. Par conséquent, il existe un voisinage U de 0 dans E/F tel que $\psi(x) \in U$ entraîne $\varphi(xb) \in (\tilde{x}')^\circ$ pour tout $b \in B$, où $\tilde{x}'$ est une forme linéaire sur E/H définie par $x' = \tilde{x}' \circ \varphi$. Il est claire que $V = \psi^{-1}(U)$ est un voisinage de 0 pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Or, si $x \in V$, on a

$$|\langle \varphi(xb), \tilde{x}' \rangle| \leqq 1 \qquad \text{pour tout } b \in B,$$

d'où

$$|\langle xb, x' \rangle| \leqq 1 \qquad \text{pour tout } b \in B.$$

Cela signifie que $VB \subseteq (x')^\circ$, et la démonstration est achevée.

COROLLAIRE. *Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E', et soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties faiblement bornées de E. Pour que l'algèbre E soit une algèbre topologique pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et chaque $B \in \mathfrak{S}$ soit faiblement hyperbornée il faut et il suffit que, pour tout $x' \in E'$, et pour tout $B \in \mathfrak{S} \smile \{(x); x \in E\}$, il existe un sous-espace vectoriel faiblement fermé $F \subseteq E$ de codimension finie tel que l'on ait $FB \subseteq H$ et $BF \subseteq H$, où H est le noyau de x'.*

La condition est évidemment nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, il suffira de noter que si $x \in E$ est hyperborné et si $B \subseteq E$ est borné, les ensembles xB et Bx sont bornés.[7]

Lorsque E est une algèbre topologique munie de la topologie séparée τ, nous désignons par $\mathfrak{G}_\tau$ (resp. $\mathfrak{D}_\tau$) l'ensemble des parties hyperbornées à gauche (resp. hyperbornées à droite) de E, et par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties finies de E, et de plus par $\mathfrak{H}_\tau$ (resp. $\mathfrak{E}_\tau$) un sous-ensemble quelconque de $\mathfrak{G}_\tau$ (resp. de $\mathfrak{D}_\tau$) tel que $\mathfrak{H}_\tau \supseteq \mathfrak{F}$ (resp. $\mathfrak{E}_\tau \supseteq \mathfrak{F}$) et que

7) Cf. S. Kasahara [3].

l'on ait $xA\in\mathfrak{H}_\tau$ (resp. $Ax\in\mathfrak{E}_\tau$) pour tout $x\in E$ et tout $A\in\mathfrak{H}_\tau$ (resp. $A\in\mathfrak{E}_\tau$). Or, tout élément x de E peut être considéré comme un élément de l'espace $\mathcal{L}(E, E)$ des applications linéaires continues de E dans E, en posant $x(y)=xy$ pour tout $y\in E$, c'est-à-dire on peut identifier E avec une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E, E)$, et la topologie sur E induite par la $\mathfrak{H}_\tau$-topologie[8] sur $\mathcal{L}(E, E)$ est évidemment compatible avec la structure d'algèbre de E,[7] qu'on appelle $\mathfrak{H}_\tau[\tau]$-*topologie à gauche* sur E. De même, on définit $\mathfrak{E}_\tau[\tau]$-*topologie à droite* sur E. Il est claire que la $\mathfrak{G}_\tau[\tau]$-topologie à gauche (resp. la $\mathfrak{D}_\tau[\tau]$-topologie à droite) est plus fine que la $\mathfrak{H}_\tau[\tau]$-topologie à gauche (resp. la $\mathfrak{E}_\tau[\tau]$-topologie à droite) et que la $\mathfrak{F}[\tau]$-topologie à gauche (resp. la $\mathfrak{F}[\tau]$-topologie à droite) est moins fine que la $\mathfrak{H}_\tau[\tau]$-topologie à gauche (resp. la $\mathfrak{E}_\tau[\tau]$-topologie à droite). Nous concernerons exclusivement, dans la suite, les topologies à gauche.

Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E', et soit τ une topologie compatible avec la dualité entre E et E'. On suppose que E est une algèbre topologique pour la topologie τ. Alors, si la $\mathfrak{F}[\tau]$-topologie à gauche est compatible avec la dualité entre E et E', pour tout topologie τ' plus fine que τ et moins fine que la topologie de Mackey $\tau(E, E')$, la $\mathfrak{F}[\tau']$-topologie est aussi compatible avec la dualité entre E et E'.

En effet, cela résulte immédiatement du fait que la $\mathfrak{F}[\tau']$-topologie à gauche est plus fine que la $\mathfrak{F}[\tau]$-topologie à gauche et moins fine que la topologie τ. Nous avons donc la

PROPOSITION 4. *Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E'. On suppose que E est une algèbre topologique pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Si la $\mathfrak{F}[\sigma(E, E')]$-topologie à gauche est identique à la topologie faible $\sigma(E, E')$, pour toute topologie τ compatible avec la structure d'algèbre de E et avec la dualité entre E et E', la $\mathfrak{H}_\tau[\tau]$-topologie à gauche est compatible avec la dualité entre E et E'.*

PROPOSITION 5. *Soit E une algèbre mise en dualité avec un espace vectoriel E'. On suppose que E est une algèbre topologique pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Alors, pour que la $\mathfrak{F}[\sigma(E, E')]$-topologie à gauche soit identique à la topologie faible il faut et il suffit que, pour tout $x'\in E'$, il existe un nombre fini de points $a_1, a_2, \cdots, a_n\in E$ et un sous-espace vectoriel faiblement fermé $F\subseteq E$ de codimension finie tels que les relations $xa_i\in F$, $i=1, 2, \cdots, n$, entraînent $x\in H$, où H est le noyau de x'.*

En effet, si la $\mathfrak{F}[\sigma(E, E')]$-topologie à gauche est identique à la topologie faible $\sigma(E, E')$, il existe, pour tout $x'\in E'$, un nombre fini de points $a_1, a_2, \cdots, a_n\in E$ et $x'_1, x'_2, \cdots, x'_m\in E'$ tels que $W_l(a_1, a_2, \cdots, a_n;$

8) La topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{H}_\tau$.

$(x'_1, x'_2, \cdots, x'_m)^\circ) = \{x \in E;\ xa_i \in (x'_1, x'_2, \cdots, x'_m)^\circ$ pour $i=1, 2, \cdots, n\} \subseteq (x')^\circ$. Posons alors $F = \{x \in E;\ \langle x, x'_i \rangle = 0$ pour tout $i=1, 2, \cdots, m\}$. Si $xa_i \in F$ pour $i=1, 2, \cdots, n$, $\lambda x a_i$ appartiennent aussi à F pour tout nombre λ, et par suite x appartient au noyau de x'.

Supposons maintenant la condition de l'énoncé. Soit x' un point de E'; il existe alors $a_1, a_2, \cdots, a_n \in E$ et un sous-espace vectoriel faiblement fermé $F \subseteq E$ de codimension finie tels que l'on ait $\langle x, x' \rangle = 0$ si $xa_i \in F$ pour tout $i=1, 2, \cdots, n$. Désignons par φ et par ψ les applications canoniques de E sur E/H et de E sur E/F respectivement, où H est le noyau de x'. Soit P l'espace produit topologique de n facteurs identiques à l'espace E/F, et soit G le sous-espace vectoriel de P constitué par les éléments de la forme $(\psi(xa_1), \psi(xa_2), \cdots, \psi(xa_n))$, $x \in E$. Comme les relations $xa_i - ya_i = (x-y)a_i \in F$, $i=1, 2, \cdots, n$, entraînent $x - y \in H$, $(\psi(xa_1), \psi(xa_2), \cdots, \psi(xa_n)) \to \varphi(x)$ est bien une application de G dans E/H. Il est claire que cette application u est linéaire, et par suite elle est continue puisque G est de dimension finie. Donc, en vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue y' sur P dont la restriction à G est identique à $\tilde{x}' \circ u$, où $\tilde{x}'$ est une forme linéaire sur E/H définie par $x' = \tilde{x}' \circ \varphi$. Pour tout $i=1, 2, \cdots, n$, désignons par y'_i la restriction de y' au sous-espace vectoriel $\{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in P;\ z_j = 0$ pour $j \neq i\}$ de P. On peut alors identifier y'_i avec une forme linéaire continue sur l'espace E/F, qu'on désigne encore par y'_i. Posons $V = \{x \in E;\ |\langle \psi(x), y'_i \rangle| \leqq \frac{1}{n}$ pour tout $i=1, 2, \cdots, n\}$, et montrons que l'ensemble $W_l(a_1, a_2, \cdots, a_n; V)$ est contenu dans $(x')^\circ$. Soit $x \in W_l(a_1, a_2, \cdots, a_n; V)$. Alors, pour tout $i=1, 2, \cdots, n$, on a les relations

$$|\langle(\psi(xa_1), 0, 0, \cdots, 0), y'_1\rangle| \leqq \frac{1}{n},$$

$$|\langle(0, \psi(xa_2), 0, 0, \cdots, 0), y'_2\rangle| \leqq \frac{1}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\langle(0, 0, \cdots, 0, \psi(xa_n)), y'_n\rangle| \leqq \frac{1}{n},$$

d'où
$$|\langle(\psi(xa_1), \psi(xa_2), \cdots, \psi(xa_n)), y'\rangle| \leqq 1,$$
donc on a
$$|\langle(\psi(xa_1), \psi(xa_2), \cdots, \psi(xa_n)), \tilde{x}' \circ u\rangle| \leqq 1,$$
et par suite $|\langle \varphi(x), \tilde{x}' \rangle| \leqq 1$, c'est-à-dire $x \in (x')^\circ$. Comme V est un voisinage de 0 pour la topologie faible $\sigma(E, E')$, cela établit la proposition.

Références

[1] N. Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques, Chaps. I–II, Hermann, Paris (1953).

[2] N. Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques, Chaps. III–V, Hermann, Paris (1955).

[3] S. Kasahara: Representation of some topological algebras. I, Proc. Japan Acad., **34**, 355–360 (1958).

[4] S. Warner: Weak locally multiplicatively-convex algebras, Pacific Jour. Math., **5**, 1025–1032 (1955).