8. *Sur l'Inégalité d'Énergie pour le Système Hyperbolique*

Par Masaya YAMAGUTI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1959)

1. *Introduction.* On sait que la question de l'unicité du problème de Cauchy a été résolue pour des équations assez générales par MM. Calderón et Zygmund [1]. Ils ont montré que les opérateurs d'intégrale singulière sont des outils très puissants. Nous allons montrer que cette méthode est aussi efficace pour trouver l'inégalité d'énergie pour le système hyperbolique, qui a été montrée pour la première fois par M. Petrowsky (voir à ce sujet [2–4]).

2. *Système hyperbolique.* Considérons le système

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = \sum_{j,k}^{N,n} a_{i,j}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \sum_{j}^{N} b_{i,j} u_j + f_i \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{1}$$

dont la matrice caractéristique

$$\left\| \begin{matrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{matrix} \right\| - \left\| \sum_k a_{i,j}^{(k)} \alpha_k \right\| \tag{2}$$

est de la forme

$$\left\| \begin{array}{cccc} \boxed{M_1} & & & \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \boxed{} & \\ & & & \boxed{M_l} \end{array} \right\| \tag{3}$$

où tous les éléments qui ne sont dans aucune carrée M_i $(i=1,\cdots,r)$ sont identiquement nuls. Les racines λ de chaque déterminant de M_i sont réelles et distinctes pour $\sum \alpha_i^2 = |\alpha|^2 = 1$. On suppose que la différence de deux racines du même déterminant est toujours supérieures à une constante positive fixée.

On supposera désormais que, pour simplifier le raisonnement, tous les coefficients sont indéfiniment dérivables et *bornés* avec toutes leurs dérivées d'ordre quelconque; le second membre $f_i(x, t)$ $(i=1,\cdots,N)$ sont des fonctions continues en t à valeurs dans L^2.

Nous allons mettre (1) sous la forme de l'équation d'évolution exprimée par opérateurs d'intégrale singulière (voir [1]):

$$\frac{d}{dt} u_i = \sum_{j}^{N} H_{ij}(i\Lambda) u_j + \sum b_{ij} u_j + f_i \quad (i=1,\cdots,N), \tag{4}$$

où $\sigma(H_{ij}) = \sum_{k}^{N} a_{ij}^{(k)} \frac{\alpha_k}{|\alpha|} = \sum_{k}^{n} a_{ij}^{(k)} \alpha'_k, \quad \alpha'_k = \frac{\alpha_k}{|\alpha|}.$

On écrit (4) sous la forme matricielle

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}U = iH\Lambda U + BU + F.$$

Remarquons que le déterminant de la matrice $\lambda I - \sigma(H)$ est identique au déterminant de la matrice (2) pour $|\alpha|=1$ ($\sigma(H)$ désigne le symbole de H). A cause de l'hyperbolicité, on peut alors trouver une matrice non singulière $\sigma(N)$ telle que $\sigma(N)\sigma(H)=\sigma(D)\sigma(N)$ pour tous t, x, $|\alpha|=1$($\sigma(D)$ est la matrice diagonale).[1] On peut vérifier alors, grâce à l'hyperbolicité, que le déterminant de $\sigma(N)$ est toujours supérieur à une constante positive fixée à valeur absolue, de sorte que $\sigma(N)$ est non singulière.

Maintenant, on peut associer un opérateur matriciel N d'intégrale singulière dont le symbole soit justement $\sigma(N)$. D'ailleurs, pour t_0, x_0 fixés $\sigma(N_0)$ est aussi le symbole d'un opérateur d'intégrale singulière N_0 qui est inversible comme un opérateur de L^2 dans lui-même (voir le Théorème 4 [1]).

3. *Inégalité d'énergie* (*locale*). Nous allons chercher d'abord une inégalité d'énergie dans un domaine cylindrique Ω de base ω qui est une boule de centre x_0, point quelconque de l'hyperplan $t=0$. Soit ω' une autre boule concentrique de ω, qui contient ω.

Modifions les coefficients a_{ij} de la manière suivante:

$$(6) \qquad a'_{ij}(t,x) = g(x)a_{ij}(t,x) + (1-g(x))a_{ij}(t,x_0),$$

où $g(x)=1$ dans ω; $g(x)=0$ dans $C\omega'$, $0 \leqq g(x) \leqq 1$, $g(x) \in C^\infty$.

Si l'on écrit l'équation (1) en une forme matricielle

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial t}U = \sum A^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_k}U + BU + F, \quad A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|.$$

Alors l'équation modifiée devient

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial t}U = \sum A'^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_k}U + BU + F, \quad A'^{(k)} = \left\| a_{ij}'^{(k)} \right\|.$$

---

1) En effet, trouver $\sigma(N)$ telle que $\sigma(N)\cdot\sigma(H)=\sigma(D)\sigma(N)$ signifie de trouver $n_{ij}(t,x,\alpha)$ telles que

$$\lambda_i n_{ij} = \sum_{s,k} n_{is} a_{sj}^{(k)} \alpha_k \qquad i=1,2,\cdots,N.$$

On peut choisir par exemple comme n_{is}: les mineurs $M_{sj}^{(i)}$ de j-ième colonne de la matrice M_r pour chaque $r=1,2,\cdots,l$. (M_r est N_r-matrice carée.)

$$(*) \qquad \left\| \begin{matrix} \sum_k a_{11}^{(k)}\alpha'_k - \lambda_i & \sum_k a_{12}^{(k)}\alpha'_k & \cdots \\ \sum_k a_{21}^{(k)}\alpha'_k & \sum a_{22}^{(k)}\alpha'_k - \lambda_i & \\ \cdots\cdots & & \end{matrix} \right\|.$$

Donc, on a N_r sortes des expressions de n_{is}.

$$n_{is} = \frac{M_{s1}^{(i)}}{\pm\sqrt{\sum_p M_{p1}^{i2}}} = \frac{M_{s2}^{(i)}}{\pm\sqrt{\sum_p M_{p2}^{i2}}} = \cdots = \frac{M_{sN_r}^{(i)}}{\pm\sqrt{\sum_p M_{pN_r}^{i2}}} \quad \text{(les signes $\pm$ convenablement choisis).}$$

Puisque le rang de la matrice (*) est exactement $N_r - 1$ (l'hyperbolicité), au moins un des dénominateurs est supérieur à une constante positive.

Par conséquent, n_{is} (donc $\sigma(N)$) sont indéfiniment dérivables bornées avec toutes leurs dérivées en t, x, α et homogènes d'ordre zéro par rapport aux $\alpha_1 \cdots \alpha_n$.

Nous désignons par L l'opérateur

$$L(t)=I\frac{d}{dt}-\sum A^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_k}+B.$$

Considérons une fonction $U(t)$ continûment différentiable en t à valeurs dans L_1^2, définie pour $t\geqq 0$ dont le support est contenu dans Ω.

On peut associer à cette équation modifiée (8) un opérateur matriciel $\overline{N}(t)$ d'intégrale singulière comme nous avons fait au n° 2, et cette fois-ci, on peut supposer $\overline{N}$ inversible parce que $\sigma(\overline{N}(t))-\sigma(N_0(t))$ et toutes ses dérivées par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont supposées aussi petites qu'on veut en prenant le diamètre de ω (ensuite celui de ω') suffisamment petit, dépendant seulement de l'oscillation des éléments de la matrice $A'^{(k)}$ de l'équation (8). Cela se fait uniformément en x_0 et en t à cause de l'hyperbolicité définie au n° 2.

On voit que

$$(9)\qquad \overline{N}Hi\Lambda=Di\Lambda\overline{N}+Di(\overline{N}\Lambda-\Lambda\overline{N})+(D\circ\overline{N}-D\overline{N})i\Lambda+(\overline{N}H-\overline{N}\circ H)i\Lambda,$$

$$\frac{d}{dt}\overline{N}U=\overline{N}\left(\frac{d}{dt}U\right)+\left(\frac{d}{dt}\overline{N}\right)U;\quad \frac{d}{dt}U=Hi\Lambda U+BU+L(U).$$

D'où

$$(10)\qquad \frac{d}{dt}\overline{N}U=\overline{N}(Hi\Lambda U+BU+L(U))+\frac{d\overline{N}}{dt}U=Di\Lambda\overline{N}U+\overline{B}U+\overline{N}L(U),$$

où $\quad \overline{B}=Di(\overline{N}\Lambda-\Lambda\overline{N})+(D\circ\overline{N}-D\overline{N})i\Lambda+(\overline{N}H-\overline{N}\circ H)i\Lambda+\dfrac{d\overline{N}}{dt}+\overline{N}B.$

Posons $\overline{N}(t)U(t)=W(t)$. $W(t)$ est aussi une fonction une fois dérivable en t à valeur dans L_1^2.

$$(11)\qquad \frac{d}{dt}W=Di\Lambda W+\overline{B}\cdot U+\overline{N}L(U).$$

On va calculer $\dfrac{d}{dt}\|W\|^2$ en prenant le produit scalaire:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|W\|^2&=\langle Di\Lambda W, W\rangle+\langle W, iD\Lambda W\rangle+\langle\overline{B}U, W\rangle+\langle W, \overline{B}U\rangle\\&\quad+\langle\overline{N}L(U), W\rangle+\langle W, \overline{N}L(U)\rangle\\&=i\langle(D\Lambda-\Lambda D^*)W, W\rangle+\langle\overline{B}U, W\rangle+\langle W, \overline{B}U\rangle\\&\quad+\langle\overline{N}L(U), W\rangle+\langle W, \overline{N}L(U)\rangle.\end{aligned}$$

Puisque $D\Lambda-\Lambda D^*$ est borné (ce qui est essentiel dans le raisonnement) et $\overline{B}$ l'est aussi (Théorème 3 [1]), on a

$$\frac{d}{dt}\|W\|^2\leqq c\|W\|^2+c_1\|U\|\ \|W\|+c_2\|W\|\ \|L(U)\|,\quad \text{où}$$

$$c=\|D\Lambda-\Lambda D^*\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)}.$$

Notons que $\overline{N}(t)$ est inversible, plus précisément, on a $\|\overline{N}(t)U\|\geqq\sigma\|U\|$ pour tout $U(t)$, supp. $(U(t))\subset\Omega$. D'ailleurs on peut prendre σ indépendamment de la position de ω. Donc on a

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\|W\|^2 \leqq c\|W\|^2 + c_1\sigma\|W\|^2 + c_2\|L(U)\|\,\|W\|$$
$$\leqq c_3\|W\|^2 + c_2\|L(U)\|\,\|W\|,\quad c_3 = c + c_1\sigma$$

d'où vient

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\frac{c_3}{2}t\right)\|W\|\right\} \leqq \exp\left(-\frac{c_3}{2}t\right)\frac{c_2}{2}\|L(U)\|.$$

Par conséquent,

$$(13)\qquad \|W(t)\| \leqq \exp\left(\frac{c_3}{2}t\right)\|W(0)\| + \int_0^t \exp\left\{\frac{c_3}{2}(t-\tau)\right\}\frac{c_2}{2}\|L(U)\|\,d\tau.$$

En tenant compte de l'inversibilité de $\overline{N}(t)$, on obtient l'inégalité:

$$(14)\qquad \|U(t)\| \leqq c_4\exp\left(\frac{c_3}{2}t\right)\|U(0)\| + c_5\int_0^t \exp\left\{\frac{c_3}{2}(t-\tau)\right\}\|L(U)\|\,d\tau$$

où les constantes c_3, c_4, c_5 dépendent seulement du diamètre de ω, indépendamment de la position de ω.

4. *Inégalité d'énergie.* Nous allons montrer que la partition de l'unité nous emmène à une inégalité d'énergie pour les solutions qui sont des fonctions continûment dérivables en t à valeur dans L_1^2 de l'équation (1).

Soit $\{\omega_i\}$ un recouvrement de morceaux, localement fini dans R^n. Chaque ouvert ω_i est supposé qu'il est contenu dans quelque boule ω définie au n° 3. Soit $\{\alpha_i(x)\}$ une partition de l'unité attachée au recouvrement $\{\omega_i\}$. Alors le support $\alpha_i(x)U(x,t)$ est contenu dans quelque Ω. On a déjà trouvé une inégalité pour cette fonction au n° 3:

$$(15)\qquad \|\alpha_i U(t)\| \leqq c_4\exp\left(\frac{c_3}{2}t\right)\|\alpha_i U(0)\| + c_5\int_0^t \exp\frac{c_3}{2}(t-\tau)\|L(\alpha_i U)\|\,d\tau.$$

Donc, pour $0 \leqq t \leqq h$,

$$\|\alpha_i U(t)\| \leqq c_4\exp\left(\frac{c_3}{2}h\right)\|\alpha_i U(0)\| + c_5\exp\left(\frac{c_3}{2}h\right)\int_0^t \|L(\alpha_i U)\|\,d\tau,$$

d'où

$$\|\alpha_i U(t)\|^2 \leqq 2c_4^2\exp(c_3 h)\|\alpha_i U(0)\|^2 + 2c_5^2 h\exp(c_3 h)\int_0^t \|L(\alpha_i U)\|^2\,d\tau$$
$$\leqq m_1\|\alpha_i U(0)\|^2 + m_2\int_0^t \|L(\alpha_i U)\|^2\,d\tau$$

où $\qquad m_1 = 2c_4^2\exp(c_3 h),\quad m_2 = 2c_5^2 h\exp(c_3 h).$

Mais on peut trouver deux constantes k_1 et k_2 pour U.[2]

---

2) Il suffit de le démontrer pour une fonction $u(x)$ à carée sommable. Il y a toujours au moins une fonction α_i telle que $\alpha_i \geq \frac{1}{\sqrt{k_1}}$ où $\sqrt{k_1}$ est l'ordre du recouvrement $\{\omega_i\}$, par suite $\sum_i \alpha_i^2 > \frac{1}{k_1}$,

$$\|u\|^2 \leqq \int(\sum_i \alpha_i)^2 u^2 dx \leqq k_1\int(\sum_i \alpha_i^2)u^2 dx \leqq k_1\sum_i\int \alpha_i^2 u^2 dx \leqq k_1\sum_i\|\alpha_i u\|^2$$

$$\sum_i\|\alpha_i u\|^2 = \sum_i\int_R |\alpha_i u|^2 dx \leqq \int_R \sum_i \alpha_i^2 |u|^2 dx \leqq k_2\int_R |u|^2 dx \leqq k_2\|u\|^2.$$

Par la même raison, on a $\sum_i\|L(\alpha_i)u\|^2 \leqq k_2'\|u\|^2$.

$$||U||^2 \leqq k_1 \sum_i ||\alpha_i U||^2 \leqq k_2 ||U||^2$$

Alors, compte tenu des inégalités:

$$||U(t)||^2 \leqq k_1 \sum_i ||\alpha_i U(t)||^2, \quad \sum_i ||\alpha_i U(0)||^2 \leqq ||U(0)||^2 k_2,$$
$$\sum_i ||L(\alpha_i) U(t)||^2 \leqq k_2' ||U(t)||^2,$$

on a

$$||U(t)||^2 \leqq k_1 k_2 m_1 ||U(0)||^2 + k_1 k_2 m_2 \int_0^t ||L(U)||^2 d\tau + k_1 k_2' m_2 \int_0^t ||U(\tau)||^2 d\tau.$$

Finalement, on obtient l'inégalité cherchée par le lemme classique,

$$(16) \qquad ||U(t)||^2 \leqq \exp(k_1 k_2' m_2 t)\Big(k_1 k_2 m_1 ||U(0)||^2 + k_1 k_2 m_2 \int_0^t ||F||^2 d\tau\Big),$$
$$0 \leqq t \leqq h.$$

On voit bien que la même méthode peut être utilisée pour trouver une inégalité qui va assurer que l'application $U(t_0) \to U(t)$ est bornée de $\mathcal{D}^m_{L^2}$ dans lui-même. Aussi ces inégalités suggéreront la résolution du problème de Cauchy pour ce système.

En terminant ce petit article, l'auteur exprime un remerciement profond à M. Sigeru Mizohata pour sa suggestion éclaircissante et son encouragement continuel.

Références

[1] A. P. Calderón: Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Jour., **80**, 16-36 (1958).

[2] L. Gårding: Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, Colloque International de C. N. R. S, Nancy (1956).

[3] J. Leray: Hyperbolic differential equations, Lecture in Princeton (1954).

[4] I. Petrowsky: Über das Cauchysche Problem für partielle Differentialgleichungen, Recueil Math., **2** (44), no. 5, 815-870 (1937).