125. *Sur le Système Hyperbolique à Coefficients Constants*

Par Masaya YAMAGUTI et Koji KASAHARA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1959)

1. *Introduction.* Considérons le système des équations aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n} A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}-Bu=0 \tag{1.1}$$

où A_j et B sont des matrices reélles constantes à N lignes et N colonnes. Nous supposons la matrice B arbitraire et nous nous proposons de chercher sous quelle condition pour A_j, le problème de Cauchy par rapport au système (1.1) soit uniformément bien posé. D'après le théorème de Gårding [1] et l'étude de Petrowsky [2], on peut transformer cette question on en une question purement algébrique, c'est-à-dire, étant donné une forme linéaire matricielle:

$$A(\xi)=\sum_{j=1}^{n} A_j\xi_j, \tag{1.2}$$

on demande quelle condition il faut imposer à (1.2) pour que toutes les parties reélles des racines de l'équation:

$$p(\lambda,\xi)=\text{dét}\,(\lambda E-iA(\xi)-B)=0 \tag{1.3}$$

soient bornées pour $|\xi|\to\infty$. Nous appelons $A(\xi)$ ce qui possède cette propriété, " fortement hyperbolique ".

2. On connait déjà des conditions suffisantes pour que la forme (1.2) soit fortement hyperbolique (voir Petrowsky [3]).

Nous montrons que les conditions suivantes sont nécessaires pour que (1.2) soit fortement hyperbolique:

1°. Toutes les racines de l'équation:

$$\text{dét}\,(\lambda E-A(\xi))=0 \tag{2.1}$$

sont reélles pour ξ reélles.

2°. $A(\xi)$ est toujours diagonalisable pour tous ξ.

3°. Il existe une matrice diagonalisatrice $N(\xi)$ bornée[1] qui possède les propriétés suivantes:

$$N(\xi)A(\xi)N(\xi)^{-1}=D(\xi) \quad \text{et} \quad \inf_{|\xi|=1}|\,\text{dét}\,N(\xi)\,|>0, \tag{2.2}$$

où $D(\xi)$ est la matrice diagonale:

$$D(\xi)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N\end{bmatrix},\ \text{les } \lambda_i \text{ sont des racines de (2.1).} \tag{2.3}$$

On a le

1) On prend toujours une matrice dont les lignes sont des vecteurs propres de longeur unité de $A(\xi)$.

Théorème. *Pour que* (1.2) *soit fortement hyperbolique il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions* 1°, 2°, 3°.

Démonstration. D'abord on sait que ces conditions constituent une condition suffisante d'après l'étude de Petrowsky [4, Chapitre 2]. De plus, il a déjà prouvé que la condition 1° est une condition nécessaire dans le même travail [5]. Et on peut aussi démontrer assez facilement grâce au théorème de M^eme Anneli Lax [6] que la condition 2° est nécessaire. Donc alors il ne reste qu'à démontrer que la condition 3° est nécessaire en supposant la condition 1° et la condition 2°. On va montrer que s'il y a une suite des points ξ_m sur la sphère unité telle que pour tous $N(\xi_m)$, dét $N(\xi_m)$ converge vers zéro pour $m\to\infty$, alors il existe une matrice constante B telle que l'équation (1.3) admette au moins une racine dont la partie reélle n'est pas bornée pour $m\to\infty$.

Considérons le discriminant $D_\lambda(\xi)$ du polynome $P(\lambda, \xi)$ par rapport à λ. Notre démonstration sera faite seulement au cas où ce discriminant $D_\lambda(\xi)$ n'est pas identiquement nulle parce que le cas où $D_\lambda(\xi)$ est identiquement nulle se traite par la presque même méthode. (La construction de la matrice B est un peu plus compliquée.)

On choisit pour B une matrice de rang 1,[2] de telle manière qu'au moins un des éléments diagonales $a_{kk}(\xi_m)$ de $N(\xi_m)BN(\xi_m)^{-1}$ tende vers ∞ pour $m\to\infty$.

Posons $\max\limits_{1\leq k\leq N} |a_{kk}(\xi_m)|=t_m$ (alors t_m tend vers ∞ pour $m\to\infty$),

$\min\limits_{i,j} |\lambda_i(\xi_m)-\lambda_j(\xi_m)|=s_m$ (s_m tend vers zéro pour $m\to\infty$).

Alors on a une équation:

$$p(\lambda, \xi_m)=\prod_{j=1}^{N}(\lambda-i\lambda_j(\xi_m))+\sum_{k=1}^{N}a_{kk}(\xi_m)\prod_{j\neq k}(\lambda-i\lambda_j(\xi_m)). \tag{2.4}$$

En suite on considère l'équation dont les racines sont t_m^{-1} fois des racines de l'équation (2.4) et au lieu de la suite ξ_m, on prend la suite des points $\xi'_m=\dfrac{t_m^{1+\varepsilon}}{s_m^{1+\delta}}\xi_m$ qui tend vers ∞ pour $m\to\infty$ ($\varepsilon>0$ arbitraire et $\delta>2N-1$), on a

$$\prod_{j=1}^{N}(\tilde{\lambda}-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m))+\sum_{k=1}^{N}\tilde{a}_{kk}(\xi'_m)\prod_{j\neq k}(\tilde{\lambda}-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m))=0 \tag{2.5}$$

où $\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)=\dfrac{t_m^{1+\varepsilon}}{s_m^{1+\delta}}\cdot\dfrac{1}{t_m}\cdot\lambda_j(\xi_m)$, $\tilde{a}_{kk}(\xi'_m)=\dfrac{a_{kk}(\xi'_m)}{t_m}=\dfrac{a_{kk}(\xi_m)}{t_m}$ parce qu'on peut supposer que $a_{kk}(\xi)$ sont homogènes d'ordre zéro.

Soient $\tilde{\sigma}_j(\xi'_m)=\tilde{\mu}_j(\xi'_m)+i\tilde{\nu}_j(\xi'_m)$ les racines de l'équation (2.5). Nous allons montrer que toutes les parties reélles des racines de l'équation (2.5) sont bornées pour $m\to\infty$. Puisque $\tilde{\sigma}_j(\xi'_m)$ sont des racines de (2.5), on a

2) On peut prendre pour B une matrice dont tous les éléments sont nulles sauf un.

$$-1=\sum_{k=1}^{N}\frac{\tilde{a}_{kk}(\xi'_m)\tilde{\mu}_j(\xi'_m)}{\tilde{\mu}_j^2(\xi'_m)+(\tilde{\nu}_j(\xi'_m)-\tilde{\lambda}_k(\xi'_m))^2},\quad j=1,2,\cdots,N. \tag{2.6}$$

Si on suppose que $\tilde{\mu}_j(\xi'_m)$ tende vers ∞ pour $m\to\infty$, (2.6) nous montre une contradiction. De plus, l'égalité (2.6) veut dire que pour chaque $\tilde{\sigma}_j(\xi'_m)$, il correspond une racine $i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)$ de l'équation:

$$\prod_{j=1}^{N}(\tilde{\lambda}-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m))=0 \tag{2.7}$$

de telle manière que $\tilde{\sigma}_j(\xi'_m)-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)$ soit bornée pour $m\to\infty$.

Si on peut démontrer que cette correspondance entre les racines de l'équation (2.5) et celles de l'équation (2.7) est biunivoque et sur, on peut facilement prouver que la partie reélle d'au moins une des racines de l'équation (2.5) ne tend pas vers zéro pour $m\to\infty$, ce qui signifie que l'équation (2.4) possède au moins une racine dont la partie reélle tend vers ∞ pour $m\to\infty$. Pour cela, on pose $\tilde{\sigma}_j(\xi'_m)=i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)-p_j(\xi'_m)$, $j=1,2,\cdots,N$. $p_j(\xi'_m)$: bornées, alors on a une identité suivante:

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{N}(\tilde{\lambda}-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)+p_j(\xi'_m))\\&=\prod_{j=1}^{N}(\tilde{\lambda}-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m))+\sum_{k=1}^{N}\tilde{a}_{kk}(\xi'_m)\prod_{k\neq j}(\tilde{\lambda}-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Puisque (2.8) est une identité, on peut mettre $\tilde{\lambda}=i\tilde{\lambda}_k(\xi'_m)$, on a

$$\begin{aligned}&p_k(\xi'_m)\prod_{j\neq k}(i\tilde{\lambda}_k(\xi'_m)-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)+p_j(\xi'_m))\\&=\tilde{a}_{kk}(\xi'_m)\prod_{j\neq k}(i\tilde{\lambda}_k(\xi'_m)-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)).\end{aligned} \tag{2.9}$$

En divisant par $p_k(\xi'_m)\prod_{j\neq k}(i\tilde{\lambda}_k(\xi'_m)-i\tilde{\lambda}_j(\xi'_m))$, on peut montrer que $\dfrac{\tilde{a}_{kk}(\xi'_m)}{p_k(\xi'_m)}$ tend vers 1 sur le plan complexe, puisque $p_j(\xi'_m)$ sont bornées et $\tilde{\lambda}_k(\xi'_m)-\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)$ tendent vers ∞ pour $m\to\infty$, ce qui montre que la partie reélle de $p_k(\xi'_m)$ c'est-à-dire celle de $\tilde{\sigma}_k(\xi'_m)$ ne tend pas vers zéro pour $m\to\infty$.

3. Maintenant il ne reste qu'à démontrer que la correspondance entre des racines de (2.5) et celles de (2.6) est biunivoque et sur.[3] Pour cela, il suffit de montrer que toutes les différences de deux racines de (2.5) tend vers ∞ pour $m\to\infty$. Considérons l'équation dont les racines sont $t_m^{-\alpha}s_m^{\beta}$ fois des racines de (2.5) (α, β sont deux constantes positives à déterminer)

$$\prod_{j=1}^{N}(\hat{\lambda}-i\hat{\lambda}_j(\xi'_m))+\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_{kk}(\xi'_m)\prod_{j\neq k}(\hat{\lambda}-i\hat{\lambda}_j(\xi'_m))=0 \tag{3.1}$$

où $$\hat{a}_{kk}(\xi'_m)=\tilde{a}_{kk}(\xi'_m)\frac{s_m^{\beta}}{t_m^{\alpha}},\quad \hat{\lambda}_j(\xi'_m)=\tilde{\lambda}_j(\xi'_m)\frac{t_m^{\beta}}{s_m^{\alpha}}\quad j=1,2,\cdots,N.$$

Nous appliquons le lemme d'Ostrowski [7] à l'équation (3.1) et l'équation:

3) On peut aussi facilement le démontrer par le théorème de Rouché dans la théorie des fonctions à variables complexes.

(3.2) $$\prod_{j=1}^{N}(\hat{\lambda}-i\hat{\lambda}_j(\xi'_m))=0,$$

on a une évaluation:

(3.3) $$|\hat{\sigma}_j-i\hat{\lambda}_j|\leqq C(t_m^{\varepsilon-\alpha}s_m^{\beta-1-\delta})(s_m^{\beta}t_m^{-\alpha})^{\frac{1}{N}}(t_m^{\varepsilon-\alpha}s_m^{\beta-1-\delta})^{\frac{N-1}{N}}$$

où $$\hat{\sigma}_j(\xi'_m)=\frac{s_m^{\beta}}{t_m^{\alpha}}\tilde{\sigma}_j(\xi'_m).$$

Or, on obtient aussi une évaluation:

(3.4) $$|\hat{\lambda}_j(\xi'_m)-\hat{\lambda}_k(\xi'_m)|\geqq t_m^{\varepsilon-\alpha}s_m^{\beta-\delta} \quad \text{pour tous } j \text{ et } k.$$

Si on prend $\varepsilon\left(1-\frac{1}{2N}\right)<\alpha<\varepsilon$, et $(\delta+1)\left(1-\frac{1}{2N}\right)<\beta<\delta$, les inégalités (3.3) et (3.4) veut dire que $|\hat{\sigma}_j(\xi'_m)-i\hat{\lambda}_j(\xi'_m)|\to 0$ et $|\hat{\lambda}_j(\xi'_m)-\hat{\lambda}_k(\xi'_m)|\to\infty$, ce qui signifie que $|\hat{\sigma}_j(\xi'_m)-\hat{\sigma}_k(\xi'_m)|$ tend vers ∞. c.q.f.d.

Remarque. Il y a des cas où la condition 2° implique déjà la condition 3°. Par exemple, on peut toujours démontrer que la forme matricielle (1.2) qui satisfait aux conditions 1° et 2°, satisfait aussi à la condition 3° si $N=2$ et n arbitraire. (On peut le démontrer par l'Induction sur n.)

Références

[1] L. Gårding: Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math., **85**, 1-62 (1950).
[2] I. G. Petrowsky: Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen, Bull. de l'Université d'Etat de Moscou, **2** (7), 1-74 (1938).
[3] I. G. Petrowsky: Loc. cit., p. 64.
[4] I. G. Petrowsky: Loc. cit., pp. 56-64.
[5] I. G. Petrowsky: Loc. cit., p. 67.
[6] A. Lax: On Cauchy problem for partial differential equation with multiple characteristics, Comm. Pur. and Appl., **9**, 135-169 (1956).
[7] A. Ostrowski: Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent, Acta Math., **72**, 99-257 (1940-1941).