54. *Sur les Treillis de Boole* $*$*-Généraux*

Par Tokui SATŌ

Institut de Mathématiques, Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 12, 1960)

1. Introduction. Dans un mémoire antérieur [4][1] nous avons traité les fonctions d'ensemble définies dans un corps borélien. Puisque ce corps est considéré comme représentation d'un treillis de Boole, la partie principle de notre analyse devrait s'appliquer sans aucun changement aux fonctionelles définies dans un treillis de Boole.

Le corps topologique des nombres réels est un des systèmes mathématiques les plus importants, et le treillis de Boole est un des membres importants du genre non-numérique d'algèbre universelle.

Cela posé, il est bien connu que les théories de la probabilité, de l'ergodicité et de la cybernétique jouent des grands rôles dans les sciences. C'est puisque ces théories sont des branches appliquées de l'analyse construite sur la synthèse de ces deux systèmes mathématiques.

A ce point de vue il me semble qu'il est bien naturel de proposer le problème suivant:

Chercher le système mathématique autant général que possible où les théorèmes de l'analyse classique subsistent.

Pour répondre à ce problème, nous introduisons, comme exemple, un système mathématique (treillis de Boole $*$-général), qui est une sorte de la géométrie continue de von Neumann, et voyons que presque tous les théorèmes obtenus dans le mémoire susmentionné [4] y subsistent.

2. Treillis de Boole $*$-général. Soit $x \to x^*$ une application d'un treillis T dans T. Lorsqu'on a $x^{**}=x$ $(x^{**}=(x^*)^*)$, $x \to x^*$ est appelée *application involutive*. Lorsqu'on a $x^* \geq y^*$ pour $x \leq y$, on dit que $x \to x^*$ est *antiordonnée*.

Lemme 1. *Une application involutive est biunivoque.*

Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'on ait

$$y^*=z^*=x, \qquad y \neq z.$$

On aurait $y=z=x^*$, ce qui est absurde. C.Q.F.D.

On a immédiatement les lemmes suivants.

Lemme 2. *Si une application* $x \to x^*$ *est involutive et antiordonnée, elle est auto-duale.*

Lemme 3.[2] *Soient* T *un treillis avec élément nul* 0 *et élément universel* 1, *et* $x \to x^*$ *une application involutive et antiordonnée de*

1) Les chiffres dans les chrochets renvoient aux Références placées à la fin de cet article.

2) Voir [2, 3].

T dans T.

Si l'on a $x \frown x^* = 0$, on a $x \smile x^* = 1$.

La réciproque est d'ailleurs vraie.

Lorsqu'une application $x \to x^*$ d'un treillis T dans T est involutive et antiordonnée, nous dirons que $x \to x^*$ est *l'application $*$-orthocomplémentaire*, T est *$*$-orthocomplémenté* et que x^* est le *$*$-orthocomplément* de x.

Théorème 1. *Soit T un treillis σ-complet et $*$-orthocomplémenté. On a*

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n)^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} x_n^*, \quad (\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n)^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n^*.$$

En effet, $\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n \leq x_k$ $(k=1, 2, \cdots)$ ayant lieu, on obtient

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n)^* \geq x_k^* \qquad (k=1, 2, \cdots),$$

d'où
$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n)^* \geq \bigcup_{k=1}^{\infty} x_k^*.$$

De même, $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n^* \geq x_k^*$ $(k=1, 2, \cdots)$ ayant lieu, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n^* \geq (\bigcap_{k=1}^{\infty} x_k)^*$.

On a donc
$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n)^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n^*.$$

De même on obtient
$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n)^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} x_n^*, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

D'une manière analogue, on établit le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit T un treillis complet et $*$-orthocomplémenté. On a*

$$(\bigcup_{\alpha} x_\alpha)^* = \bigcap_{\alpha} x_\alpha^*, \quad (\bigcap_{\alpha} x_\alpha)^* = \bigcup_{\alpha} x_\alpha^*.$$

Soient T un treillis σ-complet et $\{x_n\}$ une suite d'éléments de T.

Posons $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} x_k$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} x_k$.

On a alors
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

En particulier lorsqu'on a $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, cet élément commun s'appelle *limite* de $\{x_n\}$ et se note $\lim_{n\to\infty} x_n$.

D'après le théorème 1 on a le théorème suivant.

Théorème 2. *Soient T un treillis σ-complet et $*$-orthocomplémenté et $\{x_n\}$ une suite d'éléments de T. On a*

$$(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n)^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n^*, \quad (\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n)^* = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n^*.$$

Théorème 3. *Soit T un treillis complet et $*$-orthocomplémenté. Si l'on a $x_\alpha \leqq x_\beta$ $(x_\alpha \geqq_\beta)$ pour $\alpha < \beta < \Omega$, on a*

$$(\bigcup_{\alpha<\Omega} x_\alpha) \frown x = \bigcup_{\alpha<\Omega} (x_\alpha \frown x)$$
$$((\bigcap_{\alpha<\Omega} x_\alpha) \smile x = \bigcap_{\alpha<\Omega} (x_\alpha \smile x)),$$

où Ω est un nombre ordinal transfini quelconque.

D'abord, on a
$$\bigcup_{\alpha<\Omega} x_\alpha \geq \bigcup_{\alpha<\Omega} (x_\alpha \frown x).$$

$x \geq x_\alpha \frown x$ entraîne
$$x \geq \bigcup_{\alpha<\Omega} (x_\alpha \frown x).$$

On a donc
$$(\bigcup_{\alpha<\Omega} x_\alpha) \frown x \geq \bigcup_{\alpha<\Omega} (x_\alpha \frown x).$$

T étant $*$-orthocomplémenté, $x_\alpha \leq x_\beta$ $(\alpha < \beta)$ entraîne $x_\alpha^* \geq x_\beta^*$.

On a donc
$$(\bigcap_{\alpha<\beta} x_\alpha^*) \smile x^* \geq x_\beta^* \smile x^* \geq \bigcap_{\alpha<\Omega} (x_\alpha^* \smile x^*),$$

d'où
$$(\bigcap_{\alpha<\Omega} x_\alpha^*) \smile x^* \geq \bigcap_{\alpha<\Omega} (x_\alpha^* \smile x^*).$$

D'après le corollaire du théorème 1, on a

$$(\bigcup_{\alpha<\Omega} x_\alpha)\frown x \leq \bigcup_{\alpha<\Omega}(x_\alpha\frown x).$$

On obtient donc $(\bigcup_{\alpha<\Omega} x_\alpha)\frown x = \bigcup_{\alpha<\Omega}(x_\alpha\frown x)$, C.Q.F.D.

Soit T un treillis $*$-orthocomplémenté. Définissons la différence $x-y$ des deux éléments x et y de T par

$$x-y=x\frown y^*,$$

y^* étant le $*$-orthocomplément de y. On a aisément les corollaires suivants.

Corollaire 1. *Soient T un treillis σ-complet et $*$-orthocomplémenté et $\{x_n\}$ une suite d'éléments telle que*

$$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq\cdots,\quad x_n\in T\qquad (n=1,2,\cdots).$$

Posons $y_n=x_1-x_n$ $(n=1,2,\cdots)$,

on a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_1-\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Corollaire 2. *Soient T un treillis $*$-orthocomplémenté et K un ensemble d'éléments de T qui satisfait aux conditions suivantes:*

i) *K possède au moins un élément,*

ii) *si l'on a $x\in K$, on a $x^*\in K$,*

iii) *si l'on a $x\in K$, $y\in K$, on a $x\smile y\in K$;*

K est un sous-treillis de T.

Ce treillis K s'appelle *treillis de Jordan.*

Corollaire 3. *Soient T un treillis σ-complet et $*$-orthocomplémenté et B un ensemble d'éléments de T qui satisfait aux conditions suivantes:*

i) *B possède au moins un élément,*

ii) *si l'on a $x\in B$, on a $x^*\in B$,*

iii) *si l'on a $x_n\in B$ $(n=1,2,\cdots)$, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n\in B$;*

B est un sous-treillis de T.

De plus si l'on a

$$x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq\cdots,\ x_n\in B\ (n=1,2,\cdots),\ (x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq\cdots),$$

on a

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n)\frown x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n\frown x)$$

$$((\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n)\smile x=\bigcap_{n=1}^{\infty}(x_n\smile x))$$

pour tout élément x de B.

On appelle *B treillis de Borel.*

Soit T un treillis complet, modulaire et complémenté. Lorsqu'on peut définir une application $*$-orthocomplémentaire de T dans T, T s'appelle *géométrie $*$-continue.*

Exemple 1. Considérons le plan projectif dans lequel une courbe d'ordre 2 est définie. Lorsqu'on définit une application $*$-orthocomplémentaire par la relation de pôle et axe polaire par rapport à cette courbe, on obtient un treillis T $*$-orthocomplémenté. T est une géométrie $*$-continue.

D'après le théorème 3, on obtient immédiatement le théorème suivant.

Théorème 4. *La géométrie $*$-continue est une géométrie continue de von Neumann (au sens général).*[3]

Soit T un treillis avec élément nul 0. Lorsqu'on a dans T

$$c=(a\smile c)\frown(b\smile c)$$

pour $a\frown b=0$, T s'appelle treillis *quasi-distributif*.

Exemple 2. Le treillis représenté par la Fig. 1 est quasi-distributif, mais il n'est pas distributif.

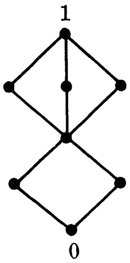


Fig. 1

Avec M. F. Maeda on dira qu'un treillis T avec élément nul 0 est séparable, lorsqu'on peut prendre un élément c tel que

$$a\frown c=0, \quad b\frown c\neq 0$$

pour $a<b$. Alors d'une manière analogue à la démonstration d'un théorème de Wallman,[4] on peut aisément prouver le théorème suivant.

Théorème 5. *Soit Ω l'ensemble des dualidéaux maximaux d'un treillis séparable T. Si l'on désigne $E(a)$ par l'ensemble de dualidéaux maximaux contenant un élément $a(\in T)$, l'application $a\to E(a)$ est une correspondance biunivoque entre T et la famille des ensembles $\{E(a); a\in T\}$ dans Ω et on a*

$$E(a\frown b)=E(a)\frown E(b).$$

En particulier, si T est un treillis séparable et quasi-distributif, T est isomorphe au treillis des ensembles $\{E(a); a\in T\}$.

Lemme 4. *Soit T un treillis quasi-distributif et avec élément nul 0 et élément universel 1. T possède au plus un complément pour un élément.*

Soient y et z deux compléments de x. On a $z=(x\smile z)\frown(y\smile z)$, d'où $z\geq y$.

De même, on a $\quad y\geq z.$

On obtient donc $\quad y=z, \quad$ C.Q.F.D.

D'après le théorème bien connu[5] et les lemmes 3 et 4, nous avons aisément le théorème suivant.

Théorème 6. *Soit T un treillis quasi-distributif et avec élément nul 0 et élément universel 1. Pour que T soit un treillis de Boole, il faut et il suffit qu'on peut définir une application $*$-orthocomplémentaire $x\to x^*$ telle que $x\frown x^*=0$.*

Soit T un treillis complet, modulaire et $*$-orthocomplémenté. Lorsqu'on a

$$x\frown x^*=0$$

pour tout élément x de T, T s'appelle *treillis de Boole $*$-général.*

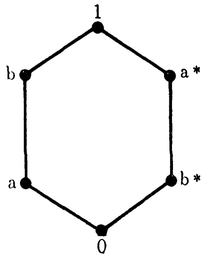
---

3) Voir [3].

4) Voir [3].

5) Voir [1, 3].

Exemple 3. Le treillis représenté par la Fig. 2 est un treillis complet et $*$-orthocomplémenté satisfaisant à la condition $x \frown x^* = 0$.



Application $x \to x^*$:

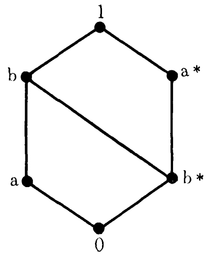
$0 \rightleftarrows 1,$

$a \rightleftarrows a^*,$

$b \rightleftarrows b^*.$

Fig. 2

Exemple 4. Le treillis représenté par la Fig. 3 est un treillis complet, distributif et $*$-orthocomplémenté.



Application $x \to x^*$:

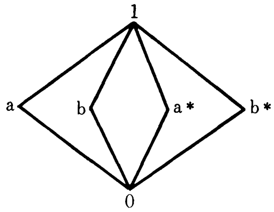
$0 \rightleftarrows 1,$

$a \rightleftarrows a^*,$

$b \rightleftarrows b^*.$

Fig. 3

Exemple 5. Le treillis représenté par la Fig. 4 est un treillis de Boole $*$-général.



Application $x \to x^*$:

$0 \rightleftarrows 1,$

$a \rightleftarrows a^*,$

$b \rightleftarrows b^*.$

Fig. 4

D'après le lemme 3, on obtient le théorème suivant.

Théorème 7. *Le treillis de Boole $*$-général est une géométrie $*$-continue.*

Corollaire 1. *Soient T un treillis de Boole $*$-général et $\{x_n\}$ une suite d'éléments telle que*

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots, \quad x_n \in T \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

Posons $y_n = x - x_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, *où* $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. *On a*

(i) $$x = x_n \smile y_n \qquad (n=1, 2, \cdots),$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Corollaire 2. *Si l'on pose*

$$z=x-(x\frown y)$$

dans un treillis de Boole $*$-général, on a

$$x=z\smile(x\frown y).$$

En effet, $z\leq x$ ayant lieu, on a

$$\begin{aligned} z\smile(x-z) &= z\smile\{x\frown(x\frown(x\frown y)^*)^*\} \\ &= z\smile\{x\frown(x^*\smile(x\frown y))\} \\ &= z\smile\{(x\frown y)\smile(x\frown x^*)\} \\ &= z\smile(x\frown y). \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$z\smile(x-z)=z\smile(x\frown z^*)=(z\smile z^*)\frown x=x, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

De résultats obtenus ci-dessus, on pourrait dire que *presque tous les théorèmes de l'analyse concernant les fonctions d'ensemble dans le mémoire susmentionné* [4] *se généralisent aux fonctionelles définies dans le treillis de Boole $*$-général.*

Références

[1] G. Birkhoff: Lattice theory, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ., **25** (1948).
[2] G. Birkhoff and J. von Neumann: The logic of quantum mechanics, Ann. of Math., **37**, 823-843 (1936).
[3] F. Maeda: Kontinuierliche Geometrien, Springer (1958).
[4] T. Satō: Sur l'analyse générale (Théorie des fonctions d'ensemble), Annali di Mat., **47**, 253-318 (1959).