78. *Les Intégrales E. R. Généralisées sous une Forme de Radon-Stieltjes*

Par Hatsuo OKANO
Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., June 13, 1960)

Nous avons déjà étendu la notion de l'intégrale *E.R.* de sorte qu'elle s'applique aux fonctions définies dans l'espace muni d'une mesure de Radon.[1] D'autre part, utilisant la méthode de changement de la variable, Prof. K. Kunugi a élargi la portée de l'intégration dans l'intervalle fini.[2] Dans la présente Note, nous allons à lui donner une forme de Radon-Stieltjes.

Tout d'abord, commençons par la

Définition de l'espace rangé. Étant donné un espace R muni d'un système de voisinages satisfaisant aux axiomes (A), (B) de F. Hausdorff,[3] on dit qu'il est un espace rangé si, pour tout nombre positif γ, il existe une famille de voisinages $\mathfrak{B}_\gamma$ qui satisfait à la condition: (a) Pour tout voisinage $v(p)$ de point p et pour tout nombre positif γ, il existe un nombre positif γ', $\gamma'<\gamma$, tel qu'il existe un voisinage $u(p)$ du point p appartenant à la famille $\mathfrak{B}_{\gamma'}$ et qui est contenu dans $v(p)$.

Une suite monotone décroissante de voisinages

$$v_0(p_0)\supseteq v_1(p_1)\supseteq\cdots\supseteq v_n(p_n)\supseteq\cdots,\ v_n(p_n)\in\mathfrak{B}_{\gamma_n},$$

est dite fondamentale si $\gamma_n\downarrow 0$.[4]

Un espace rangé est dit complet si, pour toute suite fondamentale $\{v_n(p_n)\}$, on a $\bigcap_n v_n(p_n)\neq 0$.

Définition de l'intégrale. Soit $(X, \mathfrak{S})$ un espace mesurable tel que $X\in\mathfrak{S}$.[5] Soient μ, ν deux mesures sur $\mathfrak{S}$ telles que $\mu\equiv\nu$ et telles que $\nu(X)$ soit σ-finie. Désignons par $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(X)$ la famille de toutes les fonctions partout finies et mesurables sur X, identifiant deux fonctions qui ne sont pas différentes que sur un ensemble de mesure nulle. D'ailleurs, désignons par $\boldsymbol{R}$ l'espace des nombres réels. Alors, le produit

1) H. Okano: (ER)-integral of Radon-Stieltjes type, Proc. Japan Acad., **34**, 580-584 (1958). La notion de l'intégrale *E.R.* a été premièrement introduite par Prof. K. Kunugi dans la Note: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215-220 (1956).

2) K. Kunugi: Sur une généralisation de l'intégrale, §4 Généralisation, Fundamental and Applied Aspects of Math., **1**, 1-30 (1959).

3) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 213 (1914).

4) $\gamma_n\downarrow 0$ signifie que $\gamma_0>\gamma_1>\cdots>\gamma_n>\cdots$ et $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0$.

5) Pour la notion concernant la mesure, nous nous conformons à P. R. Halmos: Measure Theory, New York (1950).

$\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{R}$ est un espace vectoriel. Nous allons maintenant introduire un système des voisinages et une famille $\mathfrak{B}_\gamma$ dans $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$. Pour tout $\gamma>0$ et pour tout $A\in\mathfrak{S}$, désignons par $V(\gamma, A)$ le sous-ensemble de toutes les paires (f, λ) telles que $\int_A |f(x)|\,d\mu(x)\leq\gamma$ et $|\lambda|\leq\gamma$. Le système de voisinages de (f, λ) est la famille $\{V(\gamma, A)+(f, \lambda);\ \gamma>0, A\in\mathfrak{S}\}$. Posons $\mathfrak{B}_\gamma=$ la totalité de voisinages $V(\gamma, A)+(f, \lambda)$ tels que $\nu(X-A)\leq\gamma$. Alors, $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$ est un espace rangé complet et, pour toute suite fondamentale $\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, \lambda_n)\}$, pour que $(f, \lambda)\in\bigcap_n\{V(\gamma_n, A_n)+(f_n, \lambda_n)\}$, il faut et il suffit qu'on ait $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ presque partout et $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$ simultanément.

Or, nous allons introduire la notion de la convergence étoilée dans $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{R}$.[6] On dit que des (f_n, λ_n) convergent vers (f, λ) s'il existe une suite $A_n\in\mathfrak{S}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1*) Il existe un entier $k\geq 2$ (indépendant de n) et deux suites de nombres positifs $a(n)$, $\phi(n)$ telles que $a(n)\downarrow 0$, $\phi(n)\downarrow 0$ et qui jouissent des conditions suivantes:

(1*, 1) $$ka(n+1)\geq a(n).$$

(1*, 2) $$\nu(X-A_n)\leq a(n).$$

(1*, 3) Quels que soient m, n entiers positifs, pour tout $A\in\mathfrak{S}$ tel que $\nu(A)\leq ma(n)$, on a

$$\int_A |f_n(x)-f_0(x)|\,d\mu(x)\leq m\phi(n).$$

(2*) On peut extraire de toute suite partielle $\{(f_{n[\kappa]}, \lambda_{n[\kappa]})\}$, $\kappa=0, 1, 2, \cdots, n[0]<n[1]<\cdots$, une suite partielle $\{(f_{n[\kappa(\iota)]}, \lambda_{n[\kappa(\iota)]})\}$, $\iota=0, 1, 2, \cdots$, $\kappa(0)<\kappa(1)<\cdots$ telle qu'il existe une suite de nombres positifs γ_ι telle que $\{v_\iota\}=\{V(\gamma_\iota, A_{n[\kappa(\iota)]})+(f_{n[\kappa(\iota)]}, \lambda_{n[\kappa(\iota)]})\}$ soit fondamentale et telle qu'on ait $(f, \lambda)\in\bigcap_\iota v_\iota$.

$\bar{S}=\bar{S}^{(\nu)}$ désigne l'adhérence d'un sous-ensemble S pour la convergence étoilée.

Désignons par $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}(\mu)$ l'ensemble de tous les (f, λ) tels que f soit sommable pour μ et tels que $\lambda=\int_X f(x)\,d\mu(x)$. Nous pouvons alors démontrer les lemmes suivants.

Lemme 1. $\boldsymbol{L}\subset\bar{\boldsymbol{L}}$.

Lemme 2. Soit $(f, \lambda)\in\bar{\boldsymbol{L}}$. Alors, il existe une suite $B_n\in\mathfrak{S}$ telle que

(1) $$\nu(B_n-B_{n+1})=0;$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\nu(X-B_n)=0;$$

6) Cf. K. Kunugi: Loc. cit., 2), p. 20.

(3) $f(x)$ soit sommable pour μ sur chacun des B_n;

(4) $$\lambda=\lim_{n\to 0}\int_{B_n} f(x)\,d\mu(x).$$

Lemme 3. $\bar{L}$ est linéaire.

Or, le Lemme 3 combiné avec le Lemme 2 montre bien que, dans l'ensemble $\bar{L}$, le nombre λ est déterminé par la fonction f. En effet, soient $(f, \lambda)\in\bar{L}$, $(f, \lambda')\in\bar{L}$. Alors, on a $(0, \lambda-\lambda')\in\bar{L}$; donc, $\lambda-\lambda'=0$.

En possant $(f, \lambda)\in\bar{L}$, nous pouvons donc définir l'intégrale $(E.R.\ \nu)$ de $f(x)$ pour μ par

$$(E.R.\ \nu)\int_X f(x)\,d\mu(x)=\lambda.$$

La fonction $f(x)$ est dite intégrable $(E.R.\ \nu)$ pour μ.

Le Lemme 1 combiné avec le Lemme 2 montre que, pour toute fonction non négative, l'intégrale de Radon-Stieltjes et la notre sont égales.

Soient μ, μ', ν, ν quatre mesures σ-finies sur $\mathfrak{S}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) $$\mu\equiv\mu'\equiv\nu\equiv\nu'.$$

(2) Il existe deux nombres m, M tels que $0<m<\dfrac{d\nu'}{d\nu}<M<\infty$. Alors, on a

$$(E.R.\ \nu)\int_X f(x)\,d\mu(x)=(E.R.\ \nu')\int_X f(x)\,\frac{d\mu}{d\mu'}(x)\,d\mu'(x),$$

au sens que, si l'une existe, alors l'autre aussi existe et les deux sont égales.

D'une part, en posant $\mu=\mu'$, il montre que, si deux mesures ν, ν' satisfont à la condition (2), l'intégrale $(E.R.\ \nu)$ pour μ est égale à l'intégrale $(E.R.\ \nu')$ pour μ. D'autre part, en posant $\nu=\nu'=\mu'$, il montre que la généralisation donnée par Prof. K. Kunugi[2] et la notre sont essentiellement coïncidentes pour la fonction définie dans l'intervalle fini.

Exemple 1. Soint X l'intervalle infini $(-\infty, \infty)$, μ la mesure de Lebesgue. Considérons la mesure ν définie par $\nu(A)=\int_A e^{|x|}e^{-e^{|x|}}dx$. Alors on a $(E.R.\ \nu)\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx=0$.

Exemple 2. Soient X l'intervalle infini $[0, \infty)$, μ la mesure de Lebesgue. Définissons la mesure ν par $\nu(A)=\int_A g(x)\,dx$, où

$$g(x)=\begin{cases} e^{x-n\pi}e^{-e^{x-n\pi}} & \text{pour}\quad 2n\pi\leq x<(2n+1)\pi \\ e^{x-(n+1)\pi}e^{-e^{x-(n+1)\pi}} & \text{pour}\quad (2n+1)\pi\leq x<(2n+2)\pi, \end{cases}$$
$$n=0, 1, 2,\cdots .$$

Alors, on a $(E.R.\ \nu)\int_0^{\infty}\sin x\,dx=(E.R.\ \nu)\int_0^{\infty}\cos x\,dx=0$.