142. Sur la Théorie Générale des Ensembles Partiellement Ordonnés. II

Par Mihail BENADO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1960)

2. *Structures topologiques et géométrico-topologiques.* 2.1. *Définition.* Je dirai que la configuration $\mathfrak{P}$ *est munie d'une structure topologique relative,* lorsqu'on se donne une fonction $f(x,y)=\bar{y}^x$ aux arguments $x, y\in\mathfrak{P}$ tels que $x\geq y$ et aux valeurs dans $\mathfrak{P}$, telle que les trois conditions suivantes soient en puissance (cf. mon travail [1]):

FR1. *On a* $\bar{x}^x=x$ *pour chaque* $x\in\mathfrak{P}$

FR2. *Pour tous les* $x, y\in\mathfrak{P}$ *tels que* $x\geq y$, *on a* $\overline{\bar{y}^x}^x\leq\bar{y}^x$

FR3. *Pour tous les* $x, y, z\in\mathfrak{P}$ *tels que* $x\geq y\geq z$,
on a $\bar{y}^x\geq\bar{z}^x\geq\bar{z}^x$

2.1.1. On montre aisément qu'on a

$$x\geq\bar{y}^x\geq y \quad (x, y\in\mathfrak{P} \text{ tels que } x\geq y)$$

$$\overline{\bar{z}^y}^x=\bar{z}^x \quad (x, y, z\in\mathfrak{P} \text{ tels que } x\geq y\geq z);$$

en outre, la condition FR2 laisse renforcer

FR2′. $\overline{\bar{y}^x}^x=\bar{y}^x$, *pour tous les* $x, y\in\mathfrak{P}$ *tels que* $x\geq y$

2.1.2. En supposant que x est fixe et faisant varier y tel que $y\leq x$ on voit que $\bar{y}^x$ est un opérateur de fermeture au sens de M. Öystein Ore [2], dans l'ensemble des $y\leq x$.

2.1.3. Certaines questions nequièrent l'nitervention des structures géométriques et topologiques d'une configuration; cf. par exemple la théorie abstraite du conducteur [3]. C'est alors une certaine combinaison des propriétés des deux structures qui s'avére propre à l'examen de la question, telle la condition suivante (cf. [1] et mon rapport [4], §9):

2.2. *Définition.* Je dirai qu'une structure topologique relative de $\mathfrak{P}$ est *unitaire* par rapport à quelque (Υ, Σ)-structure géométriquee lorsque

FR4. *Pour tous les* $a, d, e, x, y\in\mathfrak{P}$ *tels que* $d\Upsilon\{a, x\}$, $e\Upsilon\{a, y\}$, $d\geq e$ *et* $x\geq y$, *on a* $\bar{e}^d\Upsilon\{\bar{a}^d, \bar{y}^x\}$

2.3. Une autre condition importante à maints égards est *l'axiome de Kuratowski*

FRK. *Pour tous les* $a, b, d, u\in\mathfrak{P}$ *tels que* $u\geq a$,
$u\geq b$ *et* $u\geq d\Upsilon\{a, b\}$, *on a* $\bar{d}^u\Upsilon\{\bar{a}^u, \bar{b}^u\}$, cf. [3].

Cette condition FRK est une conséquence presque triviale de FR4, *pour ou que* Υ *soit naturelle,* donc telle que *pour tous les* $a, b\in\mathfrak{P}$ *tels que* $a\geq b$, *on ait* $a\Upsilon\{a, b\}$.

3. *Transformations des structures géométriques et géométrico-topologiques.* 3.1. *Définition.* Soient $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ deux configurations quelconques (non nécessairement distinctes) et munies chacune de quelque (Υ, Σ)-structure géométrique. Je dirai qu'une application φ de $\mathfrak{P}$ dans (sur) $\mathfrak{P}'$ est un (Υ, Σ)-*homomorphisme géométrique* lorsque pour tous les $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ tels que $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, c\}$, on a $d\varphi\Upsilon\{a\varphi, b\varphi\}$ et $m\varphi\Sigma\{a\varphi, b\varphi\}$.

3.1.1. Lorsque l'application φ est de plus biunivoque et réciproque et qu'on ait $d'\varphi^{-1}\Upsilon\{a'\varphi^{-1}, b'\varphi^{-1}\}$ et $m'\varphi^{-1}\Sigma\{a'\varphi^{-1}, b'\varphi^{-1}\}$ pour tous les $a', b', d', m' \in \mathfrak{P}'$ tels que $d'\Upsilon\{a', b'\}$ et $m'\Sigma\{a', b'\}$, φ^{-1} étant l'application inverse de φ, je dirai que φ est un (Υ, Σ)-*isomorphisme géométrique.* Lequel est un (Υ, Σ)-*automorphisme géométrique,* pour vu que $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$.

3.1.2. Lorsque les structures géométriques dont $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont munies, sont les structures discrètes, le notion de (Υ, Σ)-homomorphisme géométrique devient la notion ordinaire d'homomorphisme au sens de l'ordre partiel ([5], Chap. I, § 5). Un pareil homomorphisme géométrique, cela vent dire un (Δ, M)-homomorphisme sera dit *discret.*

M. Milan Kolibiar a prouvé qu'il existe des homomorphismes discrets qui ne sont pas des (Υ, Σ)-homomorphismes géométriques et réciproquement, attendu que $G(\Upsilon, \Sigma) < G(\Delta, M)$; cf. [6], § 3.

3.2. *Définition.* Les configurations $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ étant munies chacune de quelque (Υ, Σ)-structure géométrique et de quelque structure topologique, je dirai qu'une application φ de $\mathfrak{P}$ dans (sur) $\mathfrak{P}'$ est un (Υ, Σ)-*homomorphisme géométrico-topologique* lorsque pour tous les $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ tels que $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$, les deux conditions suivantes sont remplies: 1. *On a* $d\varphi\Upsilon\{a\varphi, b\varphi\}$ *et* $m\varphi\Sigma\{a\varphi, b\varphi\}$, 2. *On a* $\bar{a}^d\varphi \geq \overline{a\varphi}^{d\varphi}$ *et* $\bar{m}^a\varphi$ $\overline{m\varphi}^{a\varphi}$. (D'après l'axiome 1, φ est donc toujours un (Υ, Σ)-homomorphisme géométrique.)

3.2.1. Lorsque $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ sont munies de leurs structures géométriques discrètes, on en obtient la notion de *homomorphisme topologique* (alias *fonction continue* au sens de la topologie générale).

3.2.2. La condition FR4 (2.3) est intimement liée à la propriété d'une application φ d'être un (Υ, Σ)-homomorphisme géométrico-topologique, comme je le montrerai ailleurs. Je me borne ici à l'indication de la propriété caractéristique suivante des (Υ, Σ)-homomorphismes géométrico-topologiques:

3.3. *Théorème. Pour que l'application* φ *de* $\mathfrak{P}$ *dans* $\mathfrak{P}'$ *soit un* (Υ, Σ)-*homomorphisme topologique il faut que la condition suivante soit remplie*:

(HT) *Pour tous les* $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma(a,,b\}$, $\bar{a}^d = a$, $\bar{b}^d = b$, $\bar{m}^a = m = \bar{m}^b$, *on a également* $\overline{a\varphi}^{d\varphi} = a\varphi$, $\overline{b\varphi}^{d\varphi} = b\varphi$, $\overline{m\varphi}^{a\varphi} = m\varphi = \overline{m\varphi}^{b\varphi}$.

Réciproquement, supposons que la (Υ, Σ)-*structure géométrique dont* $\mathfrak{P}$ *est munie, soit analytique et fermée* (1.6) *et qu'elle possède en* *outre la propriété suivante*:

($\bar{\mathrm{O}}$) *Pour tous les* $a, a_1, a', b, d, m \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $\bar{a}^d = a$, $\bar{b}^d = b$, $\bar{m}^a = m = \bar{m}^b$, $d \geq a_1 \geq a \geq a' \geq m$, $\bar{a}_1^d = a_1$ *et* $\bar{a}'^a = a'$, *il existe les éléments* $b_1, b' \in \mathfrak{P}$ *tels que* $d \geq b_1 \geq b \geq b' \geq m$ *et tels que*

$$a_1 \Upsilon\{a, b'\}, \quad a' \Sigma\{a, b_1\}$$
$$b_1 \Upsilon\{a', b\}, \quad b' \Sigma\{a_1, b\}.$$

Alors, pour que le (Υ, Σ)*-homomorphisme géométrique* φ *soit topologique* (=géométrico-topologique), *il suffit que la condition* (HT) *précédente soit vérifiée.*

Références

[1] Mihail Benado: Sur une interprétation topologique de la notion de normalité unitaire, Bull. Sci. Math. Paris, **81**, 87–112 (1957).

[2] Öystein Ore: Some studies on closure relations, Duke Math. Journal, **10**, 761–785 (1943).

[3] Mihail Benado: Für abstrakten Begrundung der Führetheorie, à paraitre dans le Mathematica Japonicae.

[4] ——: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés (Rapport destiné au Colloque international de Théorie des ensembles ordonnés d'Oberwolfach, 26–30 Octobre 1959), à paraitre dans les Publications Scientifiques de l'Université d'Abger (en francais) et dans les Acta de l'Université J. A. Coménius (en Russé).

[5] Garrett Birkhoff: Lattice Theory, revised edition, New-York (1948).

[6] Mihail Benado: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés I, Manuscrit, Mars (1960).