

26. Sur les Convergences dans l'Espace Rangé

Par Hatsuo OKANO

Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1961)

1. *Définition de l'espace rangé.*¹⁾—Soit R un espace muni d'un système de voisinages satisfaisant à deux conditions suivantes:²⁾

(A) À chaque point $p \in R$ correspond au moins un voisinage. Chaque voisinage de p contient p .

(B) $u(p)$ et $v(p)$ étant deux voisinages du point p , il existe un voisinage de p contenu dans $u(p) \cap v(p)$.

On dit que R est un espace rangé si à tout nombre positif γ correspond une famille de voisinages \mathfrak{B}_γ , qui jouit de la condition suivante:

(a) Pour tout voisinage $v(p)$ du point p et pour tout nombre positif α , il existe un nombre réel β tel que $0 < \beta < \alpha$ et un voisinage $u(p)$ de p appartenant à la famille \mathfrak{B}_β et qui est contenu dans $v(p)$.

Une suite monotone décroissante de voisinages

$$v_1(p_1) \supseteq v_2(p_2) \supseteq \cdots \supseteq v_n(p_n) \supseteq \cdots$$

est dite fondamentale ou de Cauchy s'il existe une suite monotone décroissante de nombres réels (γ_n) qui converge vers 0 et telle que chaque $v_n(p_n)$ appartient à \mathfrak{B}_{γ_n} .³⁾

Un espace rangé s'appelle complet si, pour toute suite de Cauchy $(v_n(p_n))$, l'intersection $\bigcap_n v_n(p_n)$ est non vide.

La notion des suites de Cauchy dans l'espace rangé est un outil de l'analyse mathématique. Nous allons l'appliquer à certains exemples concrets.

2. *La convergence (C) dans l'espace rangé.*—Étant donné un espace rangé R , on dit qu'une suite de points (p_n) converge (C) vers un point p dans R si, quelle que soit la suite partielle $(p_{n(k)})$, on en peut extraire une suite partielle $(p_{n(k(i))})$ satisfaisant à la condition suivante:

1) L'idée de l'espace rangé a été premièrement introduite par Prof. K. Kunugi dans la Note: Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, Proc. Japan Acad., 30, 553-556 (1954), pour arriver à une synthèse plus générale que l'espace métrique complet et que l'espace localement compact: *L'espace métrique complet et l'espace localement compact sont deux cas spéciaux de l'espaces rangés complets. Dans un espace rangé complet, tout ensemble ouvert est de deuxième catégorie* (le théorème de Baire).

2) Voir F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 213 (1914).

3) Cf. H. Okano: Sur les intégrales (E.R.) et ses applications, Osaka Math. J., 11, 187-212 (1959). Pour la simplicité, dans la présente Note, nous excluons la condition:

$$p_{2n} = p_{2n+1} \text{ et } r_{2n} > r_{2n+1}.$$

À chaque indice i il existe un voisinage $v_i(q_i)$ du point $q_i = p_{n(k(i))}$ tel que la suite $(v_i(q_i))$ soit de Cauchy et que p appartienne à l'intersection $\bigcap_i v_i(q_i)$.

On prouve facilement que la convergence (C) définie ci-dessus jouit des trois axiomes suivants:⁴⁾

(1°) Pour tout point $p \in R$ la suite $(p_n \equiv p)$ converge vers p .

(2°) Toute suite partielle d'une suite convergente converge vers le point limite de la suite entière.

(3°) Une suite (p_n) converge vers un point p si on peut extraire de toute suite partielle $(p_{n(k)})$ une suite partielle $(p_{n(k(i))})$ qui converge vers p .

Si les familles \mathfrak{B}_γ jouissent de la condition

(b) p et q étant deux points différents, il existe un nombre positif γ tel qu'il n'existe aucun voisinage appartenant à la famille \mathfrak{B}_γ et qui contient p et q .

On voit alors que toute suite convergente (C) converge vers un seul point et donc que l'espace R est un espace (L^*) ⁴⁾ pour la convergence (C).

Soit R un espace métrique. Si on prend pour la famille \mathfrak{B}_γ la totalité des boules fermées du centre p et du rayon γ , R est un espace rangé et la convergence (C) est identique à la convergence par rapport à la métrique.

Dans ce cas, pour que R soit un espace métrique complet, il faut et il suffit qu'il soit complet lorsqu'il est considéré comme un espace rangé.

Exemple.—Soit X un ensemble muni d'une mesure non négative μ telle que X soit mesurable. Désignons par $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X, \mu)$ la famille de toutes les fonctions finies et mesurables (non pas nécessairement bornées), identifiant deux fonctions qui ne sont pas différentes que sur un ensemble de mesure nulle. Le système de voisinages de la fonction f est défini par les ensembles $U(\gamma, A; f)$ (γ un nombre réel > 0 , A un ensemble mesurable $\subseteq X$):

$U(\gamma, A; f)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $g \in \mathbf{M}$ satisfaisant à l'inégalité $|f(x) - g(x)| \leq \gamma$ presque partout dans A .

On vérifie aisément qu'une suite (f_n) converge vers f dans \mathbf{M} si et seulement si les $f_n(x)$ convergent uniformément vers $f(x)$ presque partout dans X .

Si on prend pour \mathfrak{B}_γ la famille de tous les voisinages $U(\gamma, A; f)$ tels qu'on ait $\mu(X - A) < \gamma$, l'espace \mathbf{M} devient un espace rangé complet

4) Voir C. Kuratowski: *Topologie*. I, deuxième édition, Warszawa, 88 (1948). Les espaces abstraits ayant la notion de limite pour terme primitif ont été introduits par M. M. Fréchet dans sa Thèse: *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, 22, 1-74 (1906).

satisfaisant à la condition (b).

On voit que, pour qu'une suite (f_n) converge (C) vers f dans M , il faut et il suffit qu'on puisse extraire de toute suite partielle $(f_{n(k)})$ une suite partielle $(f_{n(k(i))})$ telle que les $f_{n(k(i))}(x)$ convergent presque uniformément vers $f(x)$ dans X .⁵⁾

3. *Limites inductives des espaces rangés.*⁶⁾—Soit R un ensemble et $(R_n)(n \geq 1)$ une suite infinie strictement croissante de sous-ensembles de R , telle que R soit réunion des R_n . Supposons chacun des R_n muni d'une famille $\mathfrak{B}_\gamma^{(n)}$, pour laquelle R_n est un espace rangé; enfin nous supposerons que la famille $\mathfrak{B}_\gamma^{(n)}$ consiste en tous les voisinages $v(p)$, $p \in R_n$, de la forme $v(p) = u(p) \cap R_n$, $u(p) \in \mathfrak{B}_\gamma^{(n+1)}$.

Si, pour chaque point $p \in R$, on prend pour le système de voisinages de p la totalité des voisinages de p dans l'espaces R_n tels que $p \in R_n$, il jouit des conditions (A), (B).

Si on prend ensuite pour la famille \mathfrak{B} , la réunion des familles $\mathfrak{B}_\gamma^{(n)}$, elle satisfait à la condition (a). L'espace rangé R défini de la sorte sera appelé la limite inductive des R_n .

On peut alors démontrer les trois énoncés suivants:

1) Pour que R soit complet, il faut et il suffit que chacun des R_n soit complet.

2) Pour qu'une suite (p_n) converge (C) vers p dans R , il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que R_m contient p_n et p et que (p_n) converge (C) vers p dans R_m .

3) Soit S un espace rangé. Pour qu'une application de R dans S soit continue pour les convergences (C), il faut et il suffit que sa restriction à chacun des R_n soit continue pour les convergences (C).

Au cas où l'espace rangé serait à la fois un espace vectoriel, un sous-ensemble A s'appelle borné si, pour tout nombre positif γ , il existe un voisinage V du point 0 appartenant à la famille \mathfrak{B} , et un nombre λ tels qu'on ait $\lambda V \supseteq A$.

Soit R la limite inductive d'une suite des espaces rangés et vectoriels (R_n) . Alors, pour qu'un ensemble $A \subseteq R$ soit borné, il faut et il suffit qu'il existe un entier n tel que $A \subseteq R_n$ et que A soit borné dans R_n .

Exemple.—Considérons maintenant l'espace \mathfrak{D} de M. L. Schwartz⁷⁾—l'espace vectoriel des fonctions complexes $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ de k

5) Nous disons qu'une suite de fonctions $(f_n(x))$ converge presque uniformément vers $f(x)$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble A tel que $\mu(X-A) < \varepsilon$ et que les fonctions $f_n(x)$ convergent uniformément vers $f(x)$ sur A . Le théorème de Egoroff montre que, si $\mu(X) < \infty$, la convergence presque uniforme est identique à la convergence p.p. Voir p. ex. P. R. Halmos: *Measure Theory*, New York (1950).

6) Cf. J. Dieudonné et L. Schwartz: La dualité dans les espaces (\mathfrak{F}) et $(\mathfrak{F}\mathfrak{F})$, *Ann. Inst. Fourier*, **1**, 61-101 (1949).

7) L. Schwartz: *Théorie des Distributions*, **1**, Paris (1950).

variables réelles, indéfiniment dérivables et à support compact.

\mathfrak{D}_n désigne le sous-espace de \mathfrak{D} formé des fonctions $\varphi(x)$ nulles pour $|x| \geq n$, le système de voisinages de la fonctions $\varphi=0$ étant défini par les $V(m, \varepsilon)$ (m entier ≥ 0 , ε nombre réel > 0):

$V(m, \varepsilon)$ est l'ensemble de toutes les fonctions φ dont toutes les dérivées $D^p \varphi$ d'ordre $\leq m$ sont bornées en module par ε .

Prenons pour $\mathfrak{B}_\gamma^{(n)}$ la famille de tous les voisinages $V(m, \gamma) + \varphi$, $\varphi \in \mathfrak{D}_n$, tels que $m = \left[\frac{1}{\gamma} \right]$. L'espace \mathfrak{D}_n est alors un espace rangé complet.

L'espace \mathfrak{D} est donc un espace rangé complet lorsqu'il est considéré comme le limite inductive des espaces rangés \mathfrak{D}_n et, d'après 2), la convergence (C) dans \mathfrak{D} est identique à celle pour la pseudo-topologie, c'est-à-dire une suite (φ_n) converge vers 0 si d'une part leurs supports sont contenus dans un compact fixe, si d'autre part les fonctions $\varphi_n(x)$ convergent uniformément vers 0, ainsi que chacune de leurs dérivées. De plus, pour qu'un ensemble soit borné à notre sens, il faut et il suffit qu'il soit borné au sens pris de M. L. Schwartz.

4. *Certaines autres convergences dans l'espace rangé.*—Dorénavant, supposons qu'il existe un ensemble d'indices Λ tel que le voisinage $v(p)$ du point $p \in R$ soit déterminé par un nombre positif γ et un indice $\lambda \in \Lambda$: $v(p) = v(\gamma, \lambda; p)$.

Étant donnée une classe Γ de suites d'indices $\in \Lambda$, nous disons qu'une suite (p_n) converge vers un point p au sens de la convergence (Γ) ou, simplement, (p_n) converge (Γ) vers p s'il existe une suite $(\lambda_n) \in \Gamma$ satisfaisant à la condition suivante:

Quelle que soit la suite partielle $(p_{n(k)})$, on en peut extraire une suite partielle $(p_{n(k(i))})$ telle qu'il existe une suite de nombres positifs γ_i telle que la suite $(v_i) = (v(\gamma_i, \lambda_{n(k(i))}; p_{n(k(i))}))$ soit de Cauchy et que $\bigcap_i v_i$ contienne p .

Si la classe Γ jouit des conditions

(1*) (1*, 1) quel que soit $p \in R$, il existe un indice $\lambda \in \Lambda$ tel que $v(\gamma, \lambda; p) \in \mathfrak{B}_\gamma$, pour tout γ ,

(1*, 2) pour tout $\lambda \in \Lambda$, la suite $(\lambda_n \equiv \lambda)$ appartient à la classe Γ ,

(2*) si $(\lambda_n) \in \Gamma$, toute suite partielle $(\lambda_{n(k)})$ appartient à la classe Γ , alors la convergence (Γ) satisfait à deux conditions (1°), (2°). Donc, sous les hypothèses (1*), (2*) et (b), l'espace R muni de la convergence (Γ) est un espace (L).⁸⁾

Exemple.—Soit X un ensemble muni d'une mesure non négative μ telle que X soit mesurable. Soit p un nombre fixe tel que $1 \leq p \leq \infty$. Nous allons considérer l'espace vectoriel $M = M(X, \mu)$ dont la topologie est définie comme il suit:

8) Voir M. Fréchet: Loc. cit.

Le système de voisinages de la fonction f est défini par les ensembles $\mathfrak{B}(\gamma, A; f)$ (γ nombre réel > 0 , A ensemble⁹⁾ $\subseteq X$) de toutes les fonctions $g \in M$ telles que $\left(\int_A |g(x) - f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma$.

Soit ν une mesure non négative satisfaisant à trois conditions suivantes:

- 1) ν est équivalente à μ .¹⁰⁾
- 2) Il existe une suite d'ensembles (X_n) telle que X soit réunion des X_n et que $\nu(X_n) < \infty$ pour tout n .
- 3) Pour tout ensemble A et pour tout nombre α tel que $0 < \alpha < \nu(A)$, il existe un ensemble B tel que $\nu(B) = \alpha$ et que $B \subseteq A$.

Si on prend pour \mathfrak{B} , la famille de tous les voisinages $V(\gamma, A; f)$ qui satisfont à deux conditions

- 1) $\nu(X - A) \leq \gamma$,
- 2) pour tout ensemble B tel que $\nu(B) \leq \nu(X - A)$ on a l'inégalité $\left(\int_B |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma$,

on vérifie que M est un espace rangé complet et qu'il jouit de la condition (b).

Si la classe Γ est formée de toutes les suites d'ensembles $A_n \subseteq X$ telle qu'il existe un nombre réel k qui satisfait à l'inégalité $k\nu(X - A_{n+1}) \geq \nu(X - A_n)$ pour tout n , elle jouit de la condition (1*).

En désignant par $K_p(\mu; \nu)$ l'adhérence de l'ensemble $L_p(\mu)$ ¹¹⁾ pour la convergence (Γ), les propositions suivantes se trouvent vérifiées:

- 1) $L_p(\mu) \subseteq K_p(\mu; \nu)$ et $L_\infty(\mu) = K_\infty(\mu; \nu)$.
- 2) $K_p(\mu; \nu)$ est un ensemble linéaire.
- 3) Si $f \in K_p(\mu; \nu)$, $g \in K_q(\mu; \nu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors la multiplication $f(x)g(x)$ appartient à $K_1(\mu; \nu)$.
- 4) Soient f_n et g_n deux suites de fonctions μ -sommables qui convergent (Γ) vers une fonction appartenant à $K_1(\mu; \nu)$. Si la suite $\left(\int_x f_n(x) d\mu \right)$ converge vers un nombre α , la suite $\left(\int_x g_n(x) d\mu \right)$ aussi converge vers le même nombre α .

5) Pour qu'une fonction f soit intégrable ($E. R.$)¹²⁾ pour μ , il

9) Dans la suite, nous disons simplement "sous-ensemble" de X , sous-entendant celui qui est mesurable.

10) Nous disons qu'une mesure ν est équivalente à une autre μ si elles satisfont à deux conditions suivantes:

i) Un ensemble $A \subseteq X$ est mesurable pour ν si et seulement s'il est mesurable pour μ .
ii) $\nu(A) = 0$ si et seulement si $\mu(A) = 0$.

11) $L_p(\mu)$ désigne l'ensemble des fonctions de puissance p -ième sommable pour μ .

12) Voir H. Okano: Les intégrales $E.R.$ généralisées sous une forme de Radon-Stieltjes, Proc. Japan Acad., 36, 324-326 (1960). La notion de l'intégrale $E.R.$ a été introduite par Prof. K. Kunugi dans la Note: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., 32, 215-220 (1956).

faut et il suffit qu'elle appartient à $K_1(\mu; \nu)$ et qu'il existe une suite de fonctions μ -sommables f_n qui converge (Γ) vers f dans M et telle que la suite $\left(\int_x f_n(x) d\mu\right)$ converge vers un nombre α . Dans ce cas, on a (E. R. ν) $\int_x f(x) d\mu = \alpha$.