22. Sur la Théorie Générale des Ensembles Partiellement Ordonnés. IV

Par Mihail BENADO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1961)

Résumé. Suite des mes notes précédentes [1] de cette série, et dont je présuppose la connaissance. Les résultats de la présente note sont extraits de mon travail [2] consacré à la théorie des structures géométriques distributives.

1. *Structures géométriques distributives; définitions.* 1.1. *Définition.* J'appelle *G-distributive* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de la configuration $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, b', d, m \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b'\}$ entraînent l'égalité $b=b'$.

1.2. *Définition.* J'appelle *G^*-distributive* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, b', d, d', m, m' \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$, $d'\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $m'\Sigma\{a, b'\}$, $d\geq d'$ et $m\geq m'$ entraînent l'inégalité $b\geq b'$.

La propriété d'une structure géométrique d'être G^*-distributive est en quelque sorte, la réciproque de la propritété d'être partiellement monotone ([1], I, 1.6.3).

1.3. *Définition.* J'appelle *U-distributive* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que pour tous les $a, b, d, m, x \in \mathfrak{P}$ satisfaisant à $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ et $d\geq x\geq m$ l'existence les éléments $a', b' \in \mathfrak{P}$ tels que $m\leq a'\Sigma\{a, x\}$ et $m\leq b'\Sigma\{b, x\}$, ($a_1, b_1 \in \mathfrak{P}$, tels que $d\geq a_1\Upsilon\{a, x\}$ et $d\geq b_1\Upsilon\{b, x\}$) entraînent la relation $x\Upsilon\{a', b'\}$ ($x\Sigma\{a_1, b_1\}$). La structure géométrique *discrète* ([1], I, 1.5.1) *de n'importe quelle* configuration est U-distributive.

1.4. *Définition.* J'appelle *C-distributive* ou *cartésienne* toute (Υ, Σ)-structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$, $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$ entraînent les isomorphismes au sens de l'ordre partiel que voici: $(d/a)\times(d/b) \leftrightarrows d/m \leftrightarrows (a/m)\times(b/m)$.

2. *Propriétés.* 2.1. *Théorème. G^*-distributivité* (1.2) *entraîne G-distributivité* (1.1) *et celle-ci entraîne K-modularité* ([1], II, 1.1). *D'autre part, la propriété de U-distributivité est invariante par homomorphisme géométrique.*

2.2. *Théorème. Toute (Υ, Σ)-structure géométrique analytique, fermée et G-distributive de $\mathfrak{P}$, possède les propriétés suivantes:* 1. *Elle est O-modulaire* ([1], II, 1.2), 2. *Elle est forte* ([1], II, 2.8) *et partant, saturée* ([1], I, 1.6.8), 3. *Elle est W-modulaire* ([1], II, 1.3), 4. *Elle est G^*-distributive* (1.2), 5. *Elle est à interpolation cartésienne* ([1], I, 1.6.5), 6. *Elle est U-distributive,* 7. *Elle est cartésienne* (1.4).

2.3. *Théorème. Toute configuration qui se laisse munir d'une* (Υ, Σ)*-structure géométrique analytique, fermée, G-distributive et complémentée* ([1], I, 1.6.12) *est une algèbre de Boole dont la structure géométrique dédékindienne coïncide avec la* (Υ, Σ)*-structure géométrique dont la configuration a été primitivement munie. Réciproquement, la structure géométrique dédékindienne de toute algèbre de Boole est analytique, fermée G-distributive et complémentée.*

On a ainsi une caractérisation exhaustive des algèbres de Boole dans les termes de la théorie des structures géométriques des configurations.

2.4. *Théorème. Toute structure géométrique analytique, fermée et U-distributive est O-modulaire. Si, de plus, elle est saturée, elle est alors G-distributive.*

2.4.1. *Corollaire. À supposer qu'une structure géométrique de quelque configuration est analytique, fermée et saturée, les propriétés suivantes (en tant que propriétés de cette structure géométrique) sont logiquement équivalentes:* 1. *G-distributivité,* 2. *G*-distributivité.* 3. *U-distributivité.*

2.4.2. *Corollaire. À supposer que la structure géométrique hausdorffienne d'une configuration est analytique, les propriétés suivantes* (en tant que propriétés de la dite structure géométrique) *sont logiquement équivalentes:* 1. *distributivité,* 2. *G*-distributivité,* 3. *U-distributivité.*

2.5. *Théorème. Toute structure géométrique cartésienne* (1.4), *relativement complémentée et transitive* ([1], I, 1.6.10), *possède la propriété d'isomorphisme "dédékindien" que voici: Pour tous les* a, b, d, m, u, $v \in \mathfrak{P}$ *tels que* $u \geq d\Upsilon\{a, b\}$ *et* $v \leq m\Sigma\{a, b\}$ *on a les isomorphismes au sens de l'ordre partiel suivants*:

$$(u/a)\times(u/b) \leftrightarrows (u/d)\times(u/m)$$
$$(a/v)\times(b/v) \leftrightarrows (d/v)\times(m/v).$$

2.5.1. *Corollaire. Le théorème* 2.5 *est toujours vérifié par les structures géométriques dédékindiennes et hausdorffiennes, pourvu qu'elles soient analytiques, relativement complémentées et G-distibutives.*

Références

[1] Mihail Benado: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés. I-III, Proc. Japan Acad., **36**, 590-597, 636-638 (1960).

[2] ——: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés III, Manuscrit, Août (1960).