67. La Solvabilité de Certains Equations sur les Nombres Ordinaux Transfinis. III

Par Sôkiti NAGAI

Institut de Mathématiques, l'Université d'Iwaté, Morioka, Japon

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., June 12, 1961)

11. Dans la suite,*) nous considérons le cas où $\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$. Pour ce cas, nous posons $\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon$. Alors, pour m tel que $\beta_1 m=\alpha_1 g$ (donc $m>g$, et posons $l_1 m+g=l$) et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu$, il existe la relation suivante:

(11.1) $$\xi_m a=\omega^{\alpha_1 l}\lambda_1\nu+w^{\alpha_1(l-1)+\bar{\alpha}}\sigma+\omega^{\alpha_1(l-l_1-1)+\bar{\alpha}}(\eta^{l_1}\mu_0+\varepsilon).$$

Donc, pour que ξ est représentable finiment ou presque finiment par rapport à η, il faut que les relation suivantes sont accomplis:

(11.2) $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)^2_s$ $(s<r)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$ et $\alpha_1(l_1-1)\leq\alpha_0\leq\alpha_1 l_1$ $(l_1\geq 2)$ ou $\alpha_0=0$ (c'est-à-dire, $\varepsilon=0$), où la forme normale de ε est $\varepsilon=\alpha^{\alpha_0}\bar{\lambda}+\cdots$.

Par suite, pour ce cas, nous le classifierons les sous-cas suivants:

(i) $\alpha_0=\alpha_1 l_1$ et $\bar{\lambda}=\lambda_1$, (ii) $\alpha_0=\alpha_1 l_1$ et $\bar{\lambda}<\lambda_1$,
(iii) $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\alpha_k$ $(2\leq k\leq r-s)$,
(iv) $\alpha_1(l_1-1)+\alpha_k<\alpha_0<\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{k-1}$ $(2\leq k\leq r-s)$,
(v) $\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+1}<\alpha_0<\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s}$,
(vi) $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+1}$, (vii) $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+k}$ $(2\leq k\leq s)$,
(viii) $\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+k}<\alpha_0<\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+k-1}$ $(2\leq k\leq s)$,
(ix) $\alpha_1(l_1-1)\leq\alpha_0<\alpha_1(l_1-1)+\alpha_r$ $(l_1\geq 2)$, (x) $\alpha_0=0$.

Dans chaque cas, ξ peut être représentable finiment et aussi presque finiment par rapport à η. Mais, pour les cas (i)–(viii), nous pouvons démontrer qu'il n'y a aucune couple de ξ, η représentable presque finiment. Désormais nous passerons sans explication s'il en est ainsi.

12. Le sous-cas (i). Pour ce cas, nous pouvons poser

(12.1) $$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\quad \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\cdots,$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)^2_s$ $(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$ et $\lambda_{s+1}=\lambda_1(\mu_0+1)$.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

(12.2) $$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_1-1}(\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\omega^{\beta_1}(\eta)^{s+2}_r)\}\\&+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_i-1}(\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\omega^{\beta_1}(\eta)^{s+2}_r)\},\end{aligned}$$

où $t\geq 1$, $l_{i-1}>l_i$ $(2\leq i\leq t)$, $\omega^{\beta_1}(\eta)^{s+2}_r\leq(\eta)^2_{r-s}$, pour m et a convenablement choisis. Encore, lorsqu'on a $t\geq 2$, $l_2=l_1-1$ et $\omega^{\beta_1}(\eta)^{s+2}_r=(\eta)^2_{r-s}$, il faut $\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_2+\sigma<(\eta)^{r-s+1}_r$ et s'il existe au moins un $i(\geq 3)$ tel que $l_i=l_{i-1}-1$,

---

*) S. Nagai: La solvabilité de certains équations sur les nombres ordinaux transfinis. I, II, Proc. Japan Acad., **37**, 121-126, 175-178 (1961).

$\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2}=(\eta)_{r-s}^2$ et $\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma\geq(\eta)_r^{r-s+1}$, (12.2) ne coïncide pas avec la représentation de ξ par rapport à η.

Donc, nous avons la formule suivante qui coïncide avec (10.3) comme le cas spécial:

$$\sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}a_i=\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{l^{(i)}}\nu^{(i)}+\eta^{l^{(i)}-(l_1-l_2)}\nu_2+\cdots+\eta^{l^{(i)}-(l_1-l_t)}\nu_t\}, \tag{12.3}$$

où $r>s$, $t(\leq l_1)$ sont arbitraires, $m_i(1\leq i\leq p)$ $(m_{j-1}>m_j(2\leq j\leq p))$ sont choisis de façon que $\beta_1 m_i=\alpha_1 g_i$ (donc $m_i>g_i$) et $l_1 m_i+g_i=l^{(i)}$, et a_i $(1\leq i\leq p)$ sont choisis de façon que $\mu_1 a_i=\lambda_1\nu^{(i)}$.

Par suite, en revoyant (12.3) comme l'équation (E^*), nous avons la

Proposition K_1. *Si l'équation (E^*) remplit les conditions suivantes qui coïncident avec (J') comme le cas spécial:*

(K_1') *$F(\xi)$ est similaire à $G(\eta)$ et $e_1(>1)$ est un nombre fractionnaire, ou bien $F(\xi)$ est presque similaire à $G(\eta)$ et $e_1(>1)$ est un nombre fractionnaire tel que $2\leq t\leq[e_1]$ et $e_t<[e_1]$, elle a au moins des solutions ξ, η satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$(\mathrm{K}_1'')\quad \xi=\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-1}(\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2})\}$$
$$+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}(\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2})\},$$

où $r>s$, $1\leq t\leq\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]>n_1-n_t$, $\dfrac{h}{d}=\dfrac{n_1}{m_1}-\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^x d+\rho$, $\beta_1=\omega^x h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^x(d-h)+\rho=\alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$, $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2}\leq(\eta)_{r-s}^2$, $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$ *et* $\mu_0=\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}-1$. *Encore, lorsqu'on a $t\geq 2$, $n_1-n_2=1$ et $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2}=(\eta)_{r-s}^2$, il faut $\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_2+\sigma<(\eta)_r^{r-s+1}$, et s'il existe au moins un $i(\geq 3)$ tel que $n_{i-1}-n_i=1$, $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2}=(\eta)_{r-s}^2$ et $\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma\geq(\eta)_r^{r-s+1}$, ξ ne coïncide pas avec sa représentation par rapport à η.*

13. Le sous-cas (ii). Pour ce cas, nous pouvons poser

$$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\quad \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\alpha_1}\bar{\lambda}+\cdots\quad(\bar{\lambda}<\lambda_1), \tag{13.1}$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$ $(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$ et $\lambda_{s+1}=\lambda_1\mu_0+\bar{\lambda}<\lambda_1(\mu_0+1)$.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_1-1}(\omega^{\alpha_1}\bar{\lambda}+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2})\}\\&+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_i-1}(\omega^{\alpha_1}\bar{\lambda}+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2})\},\end{aligned} \tag{13.2}$$

où $t\geq 1$, $l_{i-1}>l_i(2\leq i\leq t)$, pour m tel que $\beta_1 m=\alpha_1 g$ (donc $m>g$) et $l_1 m+g=l$, et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu$.

De même que le sous-cas (i), nous avons la

Proposition K_2. *Si l'équation (E^*) remplit les conditions* (K_2') *qui coïncident avec* (K_1'), *elle a au moins des solutions ξ, η satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$(\mathrm{K}_2'')\quad \xi=\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-1}(\omega^{\alpha_1}\bar{\lambda}+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2})\}$$
$$+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}(\omega^{\alpha_1}\bar{\lambda}+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2})\},$$

où $r>s$, $1\leq t\leq\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\left[\frac{n_1}{m_1}\right]>n_1-n_t$, $\frac{h}{d}=\frac{n_1}{m_1}-\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^x d+\rho$, $\beta_1=\omega^x h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^x(d-h)+\rho=\alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$, $\frac{\mu_1}{\lambda_1}=\frac{b_1}{a_1}$, $\mu_0=\left[\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}\right]$ *et* $\bar{\lambda}=\lambda_{s+1}-\lambda_1\mu_0$.

14. Le sous-cas (iii). Pour ce cas, nous pouvons poser

$$(14.1)\quad \xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\ \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\alpha_k}\bar{\lambda}+\cdots\ (2\leqq k\leqq r-s),$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$ $(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$, $\lambda_{s+1}=\lambda_1\mu_0$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}(2\leqq i\leqq k)$, $\lambda_{s+j-1}=\lambda_{j-1}(3\leqq j\leqq k)$ et $\lambda_{s+k}=\lambda_k+\bar{\lambda}>\lambda_k$.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$(14.2)\quad \begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_1-1}(\omega^{\alpha_k}\bar{\lambda}+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+k+1})\}\\&+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_i-1}(\omega^{\alpha_k}\bar{\lambda}+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+k+1})\},\end{aligned}$$

où $t\geqq 1$, $l_{i-1}>l_i(2\leqq i\leqq t)$, pour m tel que $\beta_1 m=\alpha_1 g$ (donc $m>g$) et $l_1 m+g=l$, et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu$.

De même que le sous-cas (i), nous avons la

Proposition K_3. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions* (K_3') *qui coïncident avec* (K_1'), *elle a au moins des solutions* ξ, η *satisfaisant aux conditions suivantes*:

$$(\mathrm{K}_3'')\quad \xi=\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-1}(\omega^{\alpha_k}\bar{\lambda}+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+k+1})\}$$
$$+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}(\omega^{\alpha_k}\bar{\lambda}+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+k+1})\},$$

où $r>s$, $1\leqq t\leqq\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\left[\frac{n_1}{m_1}\right]>n_1-n_t$, $\frac{h}{d}=\frac{n_1}{m_1}-\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^x d+\rho$, $\beta_1=\omega^x h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^x(d-h)+\rho=\alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}\,(2\leqq i\leqq k)$, $\lambda_{j-1}=\lambda_{s+j-1}(3\leqq j\leqq k)$, $\frac{\mu_1}{\lambda_1}=\frac{b_1}{a_1}$, $\mu_0=\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}$ *et* $\bar{\lambda}=\lambda_{s+k}-\lambda_k$.

15. Le sous-cas (iv). Pour ce cas, nous pouvons poser

$$(15.1)\quad \xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\ \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\beta_1+\alpha_{s+k}}\lambda_{s+k}+\cdots\ (2\leqq k\leqq r-s),$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$ $(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$, $\lambda_{s+1}=\lambda_1\mu_0$, $\alpha_{i-1}=\beta_1+\alpha_{s+i-1}$ et $\lambda_{i-1}=\lambda_{s+i-1}$ $(3\leqq i\leqq k)$, $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\beta_1+\alpha_{s+k}$, $\alpha_k<\beta_1+\alpha_{s+k}<\alpha_{k-1}$ et $\bar{\lambda}=\lambda_{s+k}$.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$(15.2)\quad \begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_1-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+k}\}\\&+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_i-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+k}\},\end{aligned}$$

où $t\geqq 1$, $l_{i-1}>l_i(2\leqq i\leqq t)$, pour m tel que $\beta_1 m=\alpha_1 g$ (donc $m>g$) et $l_1 m+g=l$, et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu$.

De même que le sous-cas (i), nous avons la

Proposition K_4. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions* (K_4') *qui coïncident avec* (K_1'), *elle a au moins des solutions* ξ, η *satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$(K_4'')\qquad \begin{aligned}\xi=&\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+k}\}\\ &+\sum_{i=2}^{t}\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+k}\},\end{aligned}$$

où $r>s$, $1\leqq t\leqq\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]>n_1-n_t$, $\dfrac{h}{d}=\dfrac{n_1}{m_1}-\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^{\kappa}d+\rho$, $\beta_1=\omega^{\kappa}h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^{\kappa}(d-h)+\rho=\alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$, $\alpha_{i-1}=\beta_1+\alpha_{s+i-1}$ *et* $\lambda_{i-1}=\lambda_{s+i-1}$ $(3\leqq i\leqq k)$, $\alpha_k<\beta_1+\alpha_{s+k}$, $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$ *et* $\mu_0=\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}$.

16. Le sous-cas (v). Pour ce cas, nous pouvons poser

$$(16.1)\qquad \xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\ \ \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_2+\cdots,$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$ $(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$, $\lambda_{s+1}=\lambda_1\mu_0$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ et $\lambda_i=\lambda_{s+i}(2\leqq i\leqq r-s)$, $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\beta_1$, $\alpha_{r-s+1}<\beta_1<\alpha_{r-s}$ et $\bar{\lambda}=\lambda_1\nu_2$.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$(16.2)\qquad \xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0-1)+\eta^{l_i-1}(\eta)_{r-s}^1\},$$

où $t\geqq 2$, $l_2=l_1-1$, $l_{i-1}>l_i(3\leqq i\leqq t)$, pour m et a convenablement choisis. Encore, s'il existe au moins un $i(\geqq 3)$ tel que $l_i=l_{i-1}-1$, (16.2) ne coïncide pas avec la représentation de ξ par rapport à η, car $\beta_1>\alpha_{r-s+1}$.

Donc, nous avons la formule suivante qui coïncide avec (12.3) comme le cas spécial:

$$(16.3)\qquad \sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}a_i=\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{l^{(i)}}\nu^{(i)}+\eta^{l^{(i)}-(l_1-l_2)}\nu_2+\cdots+\eta^{l^{(i)}-(l_1-l_t)}\nu_t\},$$

où $r>s$, $t(2\leqq t\leqq l_1)$ sont arbitraires, $m_i(1\leqq i\leqq p)(m_{j-1}>m_j(2\leqq j\leqq p))$ sont choisis de façon que $\beta_1 m_i=\alpha_1 g_i$ (donc $m_i>g_i$) et $l_1m_i+g_i=l^{(i)}$, $a_i(l\leqq i\leqq p)$ sont choisis de façon que $\mu_1 a_i=\lambda_1\nu^{(i)}$.

Par suite, en revoyant (16.3) comme l'équation (E^*), nous avons la

Proposition L_1. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions suivantes qui coïncident avec* (K_1') *comme le cas spécial:*

(L_1') $F(\xi)$ *est presque similaire à* $G(\eta)$, $e_1(>1)$ *est un nombre fractionnaire tel que* $2\leqq t\leqq[e_1]$ *et* $e_t<[e_1]$, *et* $e_2=1$, *elle a au moins des solutions* ξ, η *satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$(L_1'')\qquad \begin{aligned}\xi=&\,\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)\\ &+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma+\mu_0-1)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}(\eta)_{r-s}^1\},\end{aligned}$$

où $r>s$, $2\leqq t\leqq\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $n_1-n_2=1$, $\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]>n_1-n_t$, $\dfrac{h}{d}=\dfrac{n_1}{m_1}-\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^{\kappa}d+\rho$, $\beta_1=\omega^{\kappa}h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^{\kappa}(d-h)+\rho=\alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ *et* λ_i

$=\lambda_{s+i}(2\leqq i\leqq r-s)$, $\alpha_{r-s+1}<\beta_1$, $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$ *et* $\mu_0=\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}$. *Encore, s'il existe au moins un* $i(\geqq 3)$ *tel que* $n_i=n_{i-1}-1$, ξ *ne coïncide pas avec sa représentation par rapport à* η.

17. Le sous-cas (vi). Pour ce cas, nous pouvons poser

$$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\quad \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\beta_1}\bar{\lambda}+\cdots, \tag{17.1}$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)^2_s$ $(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$, $\lambda_{s+1}=\lambda_1\mu_0$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ et $\lambda_i=\lambda_{s+i}(2\leqq i\leqq r-s)$, $\alpha_{r-s+1}=\beta_1$ et $\lambda_{r-s+1}+\bar{\lambda}=\lambda_1\nu_2$.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_2}(\omega^{\beta_1}\bar{\lambda}+\sigma+\mu_0-1)+\eta^{l_2-1}(\eta)^1_{r-s}\}\\&+\sum_{i=3}^{t}\{\eta^{l}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0-1)+\eta^{l_i-1}(\eta)^1_{r-s}\},\end{aligned}\tag{17.2}$$

où $2\leqq t$, $l_2=l_1-1$, $l_{i-1}>l_i(3\leqq i\leqq t)$, pour m tel que $\beta_1 m=\alpha_1 g$ (donc $m>g$) et $l_1m+g=l$, et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu$. Encore, s'il existe au moins un $i(\geqq 3)$ tel que $l_i=l_{i-1}-1$ et $\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma\geqq(\eta)^{r-s+1}_r$, (17.2) ne coïncide pas avec la représentation de ξ par rapport à η.

De même que le sous-cas (v), nous avons la

Proposition L_2. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions* (L_2') *qui coïncident avec* (L_1'), *elle a au moins des solutions* ξ, η *satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_2)}(\omega^{\beta_1}\bar{\lambda}+\sigma+\mu_0-1)\\&+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_2)-1}(\eta)^1_{r-s}\}+\sum_{i=3}^{t}\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma+\mu_0-1)\\&+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}(\eta)^1_{r-s}\},\end{aligned}\tag{L_2''}$$

où $2\leqq t\leqq\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $n_1-n_2=1$, $\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]>n_1-n_t$, $\dfrac{h}{d}=\dfrac{n_1}{m_1}-\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^x d+\rho$, $\beta_1=\omega^x h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^x(d-h)+\rho=\alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)^2_s$ $(r>s)$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ *et* $\lambda_i=\lambda_{s+i}$ $(2\leqq i\leqq r-s)$, $\beta_1=\alpha_{r-s+1}$, $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$, $\mu_0=\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}$ *et* $\bar{\lambda}=\lambda_1 b_2-\lambda_{r-s+1}$. *Encore, s'il existe au moins un* $i(\geqq 3)$ *tel que* $n_i=n_{i-1}-1$ *et* $\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma\geqq(\eta)^{r-s+1}_r$, ξ *ne coïncide pas avec sa représentation par rapport à* η.

18. Le sous-cas (vii). Pour ce cas, nous pouvons poser

$$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\quad \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\beta_k}\bar{\lambda}+\cdots\quad(2\leqq k\leqq s),\tag{18.1}$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)^2_s$ $(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$, $\lambda_{s+1}=\lambda_1\mu_0$, $\alpha_i=\beta_1+\alpha_{s+i}$ et $\lambda_i=\lambda_{s+i}(2\leqq i\leqq r-s)$, $\alpha_{r-s+j}=\beta_j(1\leqq j\leqq k)$, $\lambda_{r-s+1}=\lambda_1\nu_2$, $\lambda_{r-s+j'}=\lambda_{j'}(2\leqq j'\leqq k-1)$ et $\lambda_{r-s+k}+\bar{\lambda}=\lambda_k$ (donc $r-s\neq s$).

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_2}(\omega^{\beta_k}\bar{\lambda}+(\sigma)^{k+1}_s+\mu_0-1)+\eta^{l_2-1}(\eta)^1_{r-s}\}\\&+\sum_{i=3}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0-1)+\eta^{l_i-1}(\eta)^1_{r-s}\},\end{aligned}\tag{18.2}$$

où $2 \leq t$, $l_2 = l_1 - 1$, $l_{i-1} > l_i (3 \leq i \leq t)$, pour m tel que $\beta_1 m = \alpha_1 g$ (donc $m > g$) et $l_1 m + g = l$, et a tel que $\mu_1 a = \lambda_1 \nu$. Encore, s'il existe au moins un $i(\geq 3)$ tel que $l_i = l_{i-1} - 1$ et $\omega^{\beta_1} \lambda_1 \nu_i + \sigma > (\eta)_r^{r-s+1}$, (18.2) ne coïncide pas avec la représentation de ξ par rapport à η.

De même que le sous-cas (v), nous avons la

Proposition L_3. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions* (L_3') *qui coïncident avec* (L_1'), *alle a au moins des solutions* ξ, η *satisfaisant aux conditions suivantes*:

$$(\mathrm{L}_3'') \qquad \begin{aligned} \xi = \{ & \eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]} (\omega^{\beta_1} \mu_1 + \sigma + \mu_0) + \eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right] - (n_1 - n_2)} (\omega^{\beta_k} \bar{\lambda} + (\sigma)_s^{k+1} + \mu_0 - 1) \\ & + \eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right] - (n_1 - n_2) - 1} (\eta)_{r-s}^1 \} + \sum_{i=3}^{t} \{ \eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right] - (n_1 - n_i)} (\omega^{\beta_1} \lambda_1 b_i + \sigma + \mu_0 - 1) \\ & + \eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right] - (n_1 - n_i) - 1} (\eta)_{r-s}^1 \}, \end{aligned}$$

où $2 \leq t \leq \left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $n_1 - n_2 = 1$, $\left[\dfrac{n_1}{m_1}\right] > n_1 - n_t$, $\dfrac{h}{d} = \dfrac{n_1}{m_1} - \left[\dfrac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1 = \omega^{\pi} d + \rho$, $\beta_1 = \omega^{\pi} h + \rho$, $\bar{\alpha} = \omega^{\pi}(d - h) + \rho = \alpha_{s+1}$, $\omega^{\bar{\alpha}} \sigma = (\eta)_s^2$ ($r > s$ *et* $r \neq 2s$), $\alpha_i = \beta_1 + \alpha_{s+i}$ *et* $\lambda_i = \lambda_{s+i} (2 \leq i \leq r - s)$, $\alpha_{r-s+j} = \beta_j (1 \leq j \leq k)$, $\lambda_{r-s+1} = \lambda_1 b_2$, $\lambda_{r-s+j'} = \lambda_{j'}$ $(2 \leq j' \leq k - 1)$, $\bar{\lambda} = \lambda_{r-s+k} - \lambda_k$, $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1} = \dfrac{b_1}{a_1}$ *et* $\mu_0 = \dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_1}$. *Encore, s'il existe au moins un* $i(\geq 3)$ *tel que* $n_i = n_{i-1} - 1$ *et* $\omega^{\beta_1} \lambda_1 b_i + \sigma > (\eta)_r^{r-s+1}$, ξ *ne coïncide pas avec sa représentation par rapport à* η.