47. Une Nouvelle Méthode pour Considérer la Série comme une Intégrale. I

Par Hatsuo OKANO
Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 12, 1962)

Étant donnée une suite $a: a_0, a_1, a_2, \cdots$, définissons une fonction $f_a(x)$ par $f_a(x)=a_m$ pour $m \leq x < m+1$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$. Alors, pour que la fonction $f_a(x)$ soit sommable, il faut et il suffit que la série $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|$ converge (convergence absolue).

Dans la presente Note, nous allons montrer que la série convergente (convergence conditionelle) $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ se caractérise par l'intégrabilité $(E. R.)$ de la fonction $f_a(x)$ et sa somme est donnée par l'intégrale $(E. R.)$: $\sum_{m=0}^{\infty} a_m = (E.R.)\int_0^{\infty} f_a(x)dx.$

1.[1] Soit R un espace muni d'un système de voisinages. On dit que R est un espace rangé si à tout nombre réel $\varepsilon>0$ correspond une famille de voisinages $\mathfrak{V}_\varepsilon$. Une suite monotone décroissante de voisinages

$$v_0(p_0) \supseteq v_1(p_1) \supseteq \cdots \supseteq v_n(p_n) \supseteq \cdots$$

sera dite fondamentale ou de Cauchy s'il existe une suite de nombres réels ε_n qui tend vers 0 et telle que chaque $v_n(p_n)$ appartient à la famille $\mathfrak{V}_{\varepsilon_n}$.

Or, désignons par $\boldsymbol{M}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles finies $f(x)$ d'une variable réelle $(-\infty < x < \infty)$ et mesurables (non pas nécessairement bornées), identifiant deux fonctions qui sont égales presque partout, la topologie étant définie comme il suit:

Le système de voisinages de la fonction $f \in \boldsymbol{M}$ est défini par les ensembles $V(\varepsilon, A; f)$ (ε un nombre réel >0, A un ensemble mesurable) de toutes les fonctions $g \in \boldsymbol{M}$ telles que $\int_A |f(x)-g(x)|\, dx \leq \varepsilon$.

Prenons pour la famille $\mathfrak{V}_\varepsilon$ la totalité des voisinages $V(\varepsilon, A; f)$ jouissant de deux conditions suivantes:

(F_1) $\qquad \nu(C(A))$[2] $\leq \varepsilon.$

1) Voir H. Okano: Sur une généralisation de l'intégrale $(E.R.)$ et un théorème général de l'intégration par parties, à paraître.

2) ν est une mesure fixe, définie et finie sur $(-\infty, \infty)$, satisfaisant à deux conditions suivantes:

1*) Tout ensemble mesurable pour la mesure lebesguienne est mesurable pour ν.
2*) $Mes(A)=0$ si et seulement si $\nu(A)=0$.
$C(A)$ désigne le complément de A.

(F_2) Pour tout ensemble B tel que $\nu(B) \leq \nu(C(A))$, on a

$$\int_B |f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

Alors, nous pouvons démontrer le

Théorème 1. *Soit $v=(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$ une suite de Cauchy; alors, l'intersection $\bigcap V(\varepsilon_n, A_n; f_n)$ contient une et une seule fonction $f \in \boldsymbol{M}$ et les $f_n(x)$ convergent vers $f(x)$ presque partout. f est désignée par $J(v)$.*

Nous allons maintenant munir $\boldsymbol{M}$ d'une notion de limite. Nous dirons qu'une suite de Cauchy $v=(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$ converge vers une fonction $f \in \boldsymbol{M}$ si d'une part il existe un nombre réel k jouissant de l'inégalité

(P^*) $$k\nu(C(A_{n+1})) \geq \nu(C(A_n))$$

pour tout n, si d'autre part on a $J(v)=f$.

$\boldsymbol{K}$[3] désigne l'adhérence de l'espace $\boldsymbol{L}_1$ de toutes les fonctions sommables: $\boldsymbol{K}$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \boldsymbol{M}$ telles qu'il existe au moins une suite de Cauchy $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$ qui converge vers f et telle que chacune des f_n soit sommable. Étant donnée $f \in \boldsymbol{K}$, $\mathfrak{S}(f)$ désigne la totalité de telles suites de Cauchy. Alors, nous pouvons démontrer le

Théorème 2. *Soit $f \in \boldsymbol{K}$. Si $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n)) \in \mathfrak{S}(f)$ et $(V(\eta_n, B_n; g_n)) \in \mathfrak{S}(f)$, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx.$$

D'où on peut désigner ces valeurs limites par $\overline{I}(f)$[3] et $\underline{I}(f)$[3] respectivement.

Soit A un ensemble mesurable. Si $f \in \boldsymbol{K}$, sa restriction f_A sur A appartient également à $\boldsymbol{K}$. Au cas où $\overline{I}(f_A)=\underline{I}(f_A)$, écrirons

$$\overline{I}(f_A)=\underline{I}(f_A)=(E.R.)\int_A f(x)dx.$$

Si l'on a $-\infty < \overline{I}(f_A)=\underline{I}(f_A) < \infty$, la fonction $f(x)$ sera dite intégrable ($E.R.$) sur A.

2. Passons à l'étude de la relation entre la série et l'intègrale ($E.R.$), prenant pour ν une mesure définie par

$$\nu(A)=\int_A g(x)dx,$$

où $g(x)=2^{-m}$ pour $m \leq |x| < m+1$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$.

D'abord, supposons qu'une suite a_n converge vers 0. Posons

3) $\boldsymbol{K}$, $\overline{I}(f)$ et $\underline{I}(f)$ dépendent de la mesure ν.

$$\varepsilon_n^* = \max(2^{-n}, |a_n|, 2^{-1}|a_{n-1}|, \cdots, 2^{-n}|a_0|),$$
$$\varepsilon_n = \sup_{n \leq i} \varepsilon_i^*,$$
$$A_n = (-\infty, n+1),$$
$$f_n(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{pour } x \in A_n, \\ 0 & \text{pour } x \notin A_n. \end{cases}$$

Alors, $v = (V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$ est une suite de Cauchy qui converge vers f_a. De plus, chacune des $f_n(x)$ est sommable. Donc, f_a appartient à $\boldsymbol{K}$.

Inversement, supposons qu'une suite de Cauchy $(V(\varepsilon_n, A_n; f_n))$ converge vers $f_a(f_n \in L_1)$. Et, supposons, par impossible, qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ et une suite d'entiers $m(0) < m(1) < \cdots$ telle qu'on ait $|a_{m(i)}| \geq \varepsilon$ pour tout i.

Désignons par I_i l'intervalle $[m(i), m(i)+1]$ et posons $1_i = \max_n Mes(I_i \cap (A_n - A_{n-1}))$.

Premièrement, considérons le cas où il existe une suite d'entiers $i(1) < i(2) < \cdots$ telle que $l_{i(j)} \geq 2^{-1}$ pour tout j. Remarqons, d'abord, que, dans (P*), nous pouvons prendre pour k un entier ≥ 2.

Or, il existe, pour tout j, un entier $n(j)$ tel que $l_{i(j)} = Mes(I_{i(j)} \cap (A_{n(j)} - A_{n(j)-1}))$.

Puisque $\nu(C(A_{n(j)-1})) \geq 2^{-mi(j)-1} + \nu(C(A_{n(j)}))$, d'après (P*), on a
$$2(k-1)\nu(C(A_{n(j)})) \geq 2^{-mi(j)} = \nu(I_{i(j)}); \quad \text{donc}$$

$$\int_{A_{n(j)} \cap I_{i(j)}} |f_{n(j)}(x)|\, dx \leq 2(k-1)\varepsilon_{n(j)}. \tag{1}$$

D'autre part, on a

$$\int_{A_{n(j)} \cap I_{i(j)}} |f_{n(j)}(x) - f_a(x)|\, dx \leq \varepsilon_{n(j)}. \tag{2}$$

(1) et (2) entraînent

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq (2(k-1)+1)\varepsilon_{n(j)}.$$

Puisque $\overline{\lim_{j\to\infty}}\, n(j) = \infty$, on a $\underline{\lim_{j\to\infty}}\, \varepsilon_{n(j)} = 0$. C'est une contradiction.

Deuxièmement, considérons le cas où il existe une suite d'entier $i(1) < i(2) < \cdots$ telle que $l_{i(j)} < 2^{-1}$ pour tout j. Dans ce cas, il existe, pour tout j, un entier $n(j)$ tel que $\frac{1}{4} \leq Mes(I_{i(j)} \cap A_{n(j)}) \leq \frac{3}{4}$.

Soit B_j l'ensemble tel que $B_j \subseteq I_{i(j)} \cap A_{n(j)}$ et que $Mes(B_j) = \frac{1}{4}$.

Alors, on a $\nu(Bj) \leq \nu(C(A_{n(j)}))$; donc,

$$\int_{Bj} |f_{n(j)}(x)|\, dx \leq \varepsilon_{n(j)}.$$

D'autre part, on a

$$\int_{Bj} |f_{n(j)}(x) - f_a(x)|\, dx \leq \varepsilon_{n(j)}.$$

Donc, on a

$$\frac{\varepsilon}{4} \leq 2\varepsilon_{n(j)}.$$

Puisque $\lim\limits_{\overline{j\to\infty}} \varepsilon_{n(j)}=0$, c'est une contradiction.

Par conséquent, en vertu du Théorème 2, on a

Théorème 3. *Pour que la fonction* $f_a(x)$ *soit intégrable* (*E.R.*), *il faut et il suffit que la série* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m$ *converge.* Dans ce cas, on a, de plus, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m = \int_0^{\infty} f_a(x)dx$.