22. *Zu einer Franzschen Spurformel. II*

By Joseph WEIER

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1963)

Seien M, N orientierte kompakte geschlossene polyedrale Mannigfaltigkeiten, $m=\dim M$, $n=\dim N$ und $d=m-n>0$, ferner f, g: $M\to N$ stetige Abbildungen. Das Uebereinstimmungsgebilde von f, g sei ein endliches d-dimensionales Polyeder P. Seien K eine Zellenzerlegung von M, die in P die Zellenzerlegung L induziert. Der ganzzahlige Zyklus z sei die übliche algebraische Bewertung von L durch (f, g). Die topologische Abbildung ϕ: $P\to M\times N$ sei durch

$$\phi(p)=p\times f(p)=p\times g(p)$$

bestimmt. Sei $P^*=\phi(P)$, $L^*=\phi(L)$ und $z^*=\phi(z)$. Bezeichnet π: $M\times N \to M$ die Abbildung $\pi(p, q)=p$, so ist $\pi|P^*=\phi^{-1}$.

1. Seien $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \cdots$ ganzzahlige α-dimensionale Zyklen in M, die eine α-dimensionale Homologiebasis von M bilden. Zu jedem α-Zyklus x aus M gibt es also ganze Zahlen ζ^k mit $x\sim\sum\zeta^k x_k^\alpha$. Und aus $\sum\zeta^k x_k^\alpha\sim 0$ folgt $\zeta^k=0$ für alle k. Entsprechend sei $y_1^\alpha, y_2^\alpha, \cdots$ eine α-Homologiebasis von N. Wegen $\partial(x\times y)=(\partial x)\times y\pm x\times\partial y$ (man vergleiche etwa [4]) sind die Ketten

$$x_i^{d-\alpha}\times y_j^\alpha \quad (\alpha=0, 1, \cdots, d,\ i, j, =1, 2, \cdots)$$

Zyklen in $M\times N$. Bekanntlich bilden sie eine d-Homologiebasis von $M\times N$.

Es gibt also Zahlen $c^{\alpha ij}$ mit

$$z^*\sim\sum_\alpha\sum_{ij}c^{\alpha ij}x_i^{d-\alpha}\times y_j^\alpha. \tag{1}$$

Mit $z^*=\sum_{ij}x_i^{d-\alpha}\times y_j^\alpha$ ist daher $z\sim\sum_\alpha z_\alpha^*$. Sei jetzt

$$z_\alpha=\pi(z_\alpha^*). \tag{2}$$

Dann besagt ein bekannter Satz, der auch in den Beweis [2] der Franzschen Spurformel eingeht: die z_α hängen bis auf nullhomologe Bestandteile nicht von der besonderen Wahl der Basen (x) und (y) ab.

2. Offenbar ist $z=\phi^{-1}(z^*)=\pi(z^*)\sim\pi(\sum z_\alpha^*)=\sum z_\alpha$, daher

$$z\sim\sum z_\alpha. \tag{3}$$

Der Zyklus z ist zwar durch f, g fixiert. Die Zyklen z_α sind aber insofern innerhalb M verlegbar, als die Wahl der x und y nicht fest vorgegeben ist. Man kann daher annehmen, dass sich z und z_α zueinander in allgemeiner Lage befinden, dass also für $2d\geq m$ gilt:

$$\dim(z\cap z_\alpha)=2d-m,$$

sofern nicht z und z_α zueinander fremd sind. Weiterhin sei $2d\geq m$.

Für jedes α betrachten wir die zusammenhängenden Zyklen, aus denen $z\cap z_\alpha$ besteht: Sie mögen

$$z_{\alpha\beta}\ (\beta=1, 2, \cdots)$$

heissen. Es gehören $Z_1=z_{\alpha\beta_1}$ und $Z_2=z_{\alpha\beta_2}$ zur gleichen Nielsenklasse, wenn in M eine Kurve C zwischen Z_1 und Z_2 existiert, die die Eigenschaft hat: man kann f und g unter Festhaltung auf $M-U$ derart in Abbildungen f', g' deformieren, dass $f'(p)=g'(p)$ länge C ist. Dabei bedeutet U eine in M offene Menge, die die Kurve C ausser ihren Endpunkten enthält und die zu

$$Z_1 \cap Z_2$$

fremd ist. Ersichtlich existiert die Umgebung U, wenn die Kurve C mit Z_1 und Z_2 nur ihre Endpunkte gemeinsam hat. In dieser letzteren Weise lässt sich C stets wählen, wenn $m=\dim M\geq 3$. Für $m=2$ stösst man auf definitorische Schwierigkeiten, wie sie in [1] und [5] ausführlich diskutiert sind.

Die $z_{\alpha\beta}$ $(\beta=1,2,\cdots)$ zerfallen dann in Klassen $\zeta_{\alpha 1}, \zeta_{\alpha 2}, \cdots$, wobei jedes $\zeta_{\alpha\gamma}$ gewisse der $z_{\alpha\beta}$ $(\beta=1,2,\cdots)$ enthält. Ist $\zeta_{\alpha\gamma}\not\sim 0$ für wenigstens ein (α,γ), so sind f, g im Sinne von [1] miteinander verschlungen.

3. Wenn man in (f, g) die Abbildung g durch eine zu f benachbarte Abbildung f' ersetzt, gehe P, z, z_α entsprechend in P^f, z^f und z^f_α über, so dass also

$$z^f \sim \sum_\alpha z^f_\alpha.$$

Ersetzt man in (f, g) die erste Abbildung durch eine zu g benachbarte Abbildung g', so erhält man entsprechend P^g, z^g und z^g mit

$$z^g \sim \sum z^g_\alpha.$$

Wir bilden nun die Zyklen $\xi_{\alpha\beta}=z^f_\alpha \cap z^g_\beta$. Sei c^f_α, c^g_α ein zu z^f_α, z^g_α dualer Cozyklus und $\eta_{\alpha\beta}$ ein Zyklus, der zu $c^f_\alpha \cup c^g_\beta$ dual ist. Die Zyklen $\xi_{\alpha\beta}$ und $\eta_{\alpha\beta}$ sind bis auf nullhomologe Bestandteile durch f, g eindeutig bestimmt. Bei festem (α, β) zerfällt $z\cap\xi_{\alpha\beta}$ in endlich viele zusammenhängende Zyklen:

$$z\cap\xi_{\alpha\beta}=\sum_\gamma \xi_{\alpha\beta\gamma}.$$

Die $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ zerfallen wie im zweiten Abschnitt in invariante Klassen.

Von besonderem geometrischen Interesse ist die schon in [6] angeschnittene Frage, wieweit sich die einzelnen homologieinvarianten Klassen, Komponenten des Uebereinstimmungsgebildes der Abbildungen f und g, durch Mannigfaltigkeiten realisieren lassen. Hierauf und auf dimensionelle Abgrenzungen werden wir in einer Fortsetzung zu dieser Note eingehen.

Referenzen

[1] W. Franz: Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten, Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math.-Naturw. Reihe **3**, 439–443 (1953/54).
[2] W. Franz: Ueber die Graphen der Abbildungen einer Mannigfaltigkeit in eine andere, Archiv Math., **10**, 34–39 (1959).
[3] W. Franz: Topologie I, Berlin (1960).
[4] K. Reidemeister: Topologie der Polyeder. 2. Auflage. Leipzig p. 142 (1953).
[5] H. Schirmer: Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten, J. reine angew. Math., **194**, 21–39 (1955).
[6] J. Weier: Zu einer Franzschen Spurformel, Proc. Japan Acad., **38**, 303 (1962).