80. *Sur l'Aanalyticité de la Fonction Spectrale de l'Opérateur Δ Relatif au Problème Extérieur*

Par Sigeru MIZOHATA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., June 12, 1963)

1. Position du problème. Nous nous plaçons toujours dans l'espace à 3 dimensions. Etant donnée une surface fermée S assez régulière, nous allons considérer le problème extérieur de Neumann. Comme on verra, nos résultats (Théorèmes 4 et 5) sont encore vrais pour le problème extérieur de Dirichlet.

Nous allons construire, pour $Re\, \lambda>0$, le noyau de Green $G(P, Q\,|\,\lambda)$ de l'opérateur $(\lambda^2-\Delta)$ relatif au problème extérieur de Neumann, et nous voulons démontrer que ce noyau peut être prolongé holomorphiquement (en λ) au delà de l'axe imaginaire. Posons

$$G(P, Q\,|\,\lambda)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{-\lambda|P-Q|}}{|P-Q|}+K_c(P, Q\,|\,\lambda),\quad Re\,\lambda>0$$

où $K_c(P, Q\,|\,\lambda)$ est le noyau compensateur.[1] On détermine le noyau K_c de la manière suivante: pour tout Q fixé, K_c, comme fonction de P, est une solution de $(\lambda^2-\Delta)K_c=0$, dont la dérivée normale sur S satisfait à la condition:

$$K_c(p, Q\,|\,\lambda)=\frac{d}{dn_+}\left[\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{-\lambda|p-Q|}}{|p-Q|}\right].^{2)}$$

Ce problème est classique. On peut y appliquer la méthode du potentiel. En effet, on peut s'attendre à obtenir cette fonction comme potentiel de simple couche étalée sur S:

$$K_c(P, Q\,|\,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_S \psi(q; Q, \lambda)\frac{e^{-\lambda|q-P|}}{|q-P|}dq$$

où ψ est une fonction à chercher.

2. Rappel de la théorie du potentiel. Posons

$$E(P-p; \lambda)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{-\lambda|P-p|}}{|P-p|},\quad V(P)=\int_S \psi(q)E(P-q; \lambda)dq,$$

$$W(P)=\int_S \varphi(q)\frac{d}{dn_q}E(P-q; \lambda)dq,$$

où $\varphi(p)$ et $\psi(p)$ sont des fonctions continues. Posons enfin

---

1) Voir [2], pp. 123–124.

2) Nous avons adopté les notations dans [3]: p, q, r expriment les points sur S. P, Q expriment les points du domaine (extérieur ou intérieur). n désigne la normale orientée à l'extérieur. $\pm$ signifie la limite suivant la normale de l'extérieur (de l'intérieur).

$$\frac{d}{dn_q}E(p-q;\lambda)=K(p,q\,|\,\lambda),^{3)} \text{ nous avons}$$

$$(1) \qquad W_-(p)=-\varphi(p)+\int_S K(p,q\,|\,\lambda)\varphi(q)dq$$

$$(2) \qquad \frac{dV}{dn_+}(p)=-\psi(p)+\int_S K(q,p\,|\,\lambda)\psi(q)dq.$$

Il est aisé de voir que

a) pour (p, q) fixé, $p\neq q$, $K(p,q\,|\,\lambda)$ est une fonction entière de λ. Il en est de même des noyaux itérés $K^{(2)}(p,q\,|\,\lambda)$, $K^{(3)}(p,q\,|\,\lambda),\cdots$. De plus, pour $n\geq 3$, $K^{(n)}(p,q\,|\,\lambda)$ sont continues en (p, q, λ) et holomorphes en λ pour $|\lambda|<+\infty$.

b) pour $\delta>0$ fixé une fois pour toutes, il existe un N tel que $K^{(3)}(p,q\,|\,\lambda)$, $K^{(4)}(p,q\,|\,\lambda)\cdots$ sont majorés en valeur absolue par $|K^{(n)}(p,q\,|\,\lambda)|\leq C\theta^n$, $0<\theta<1$, pour $(p,q)\in S\times S$ et $Re\,\lambda>N$, $|Im\,\lambda|<\delta$.

On voit alors qu'il existe le noyau résolvant $R(p,q\,|\,\lambda)$ satisfaisant à

$$K(p,q\,|\,\lambda)=R(p,q\,|\,\lambda)-\int_S K(p,r\,|\,\lambda)R(r,q\,|\,\lambda)dr,$$

$$K(p,q\,|\,\lambda)=R(p,q\,|\,\lambda)-\int_S K(r,q\,|\,\lambda)R(p,r\,|\,\lambda)dr.$$

De plus, ce noyau s'écrit sous la forme du quotient de deux fonctions *entières* de λ;

$$R(p,q\,|\,\lambda)=\frac{N(p,q\,|\,\lambda)}{\delta(\lambda)}.$$

Nous convenons de dire que λ_0 est une *valeur propre* de (1), s'il existe $\varphi_0(p)\not\equiv 0$ telle que $\varphi_0(p)=\int_S K(p,q\,|\,\lambda_0)\varphi_0(q)dq$. La même définition pour l'équation associée (2). On voit que l'alternative de Fredholm est valable.

Théorème 1. *Supposons $Re\,\lambda\geq 0$. Alors λ est une valeur propre des équations* (1) *et* (2), *si et seulement si λ^2 est une valeur propre de l'opérateur Δ relatif au problème intérieur de Dirichlet.*

Il suffit en effet de montrer que $\Phi_0(P)=\int_S \varphi_0(q)\frac{d}{dn_q}E(P-q;\lambda_0)dq$, qui est solution de $(\lambda_0^2-\Delta)\Phi_0=0$ s'annulant sur S, n'est pas identiquement nulle pour P intérieur à S, pourvu que $\varphi_0(p)$, fonction propre correspondant à la valeur λ_0, ne soit pas identiquement nulle. On le montre par contradiction. Supposons $\Phi_0(P)\equiv 0$ pour P intérieur. On sait que la dérivée normale ne subit pas la discontinuité en travers

3) Explicitement,

$$K(p,q\,|\,\lambda)=\frac{d}{dn_q}\frac{e^{-\lambda|p-q|}}{|p-q|}=\frac{e^{-\lambda|p-q|}}{|p-q|^2}\cos(n_q,\overrightarrow{qp})+\lambda\cdot\frac{e^{-\lambda|p-q|}}{|p-q|}\cos(n_q,\overrightarrow{qp})$$

où n_q désigne la normale extérieure au point q.

de S. D'où, on aurait $\frac{d\Phi_0}{dn_+}(p)\equiv 0$ pour $p\in S$. Pour $Re\,\lambda_0>0$, $\Phi_0(P)$ est à carré sommable dans l'extérieur à S. D'où $\Phi_0(P)\equiv 0$. Pour $Re\,\lambda_0=0$, en tenant compte du comportement de $\Phi_0(P)$ pour $|P|\to+\infty$, on conclut de même $\Phi_0(P)\in L^2$, donc $\Phi_0(P)\equiv 0$ pour P extérieur à S. Ceci montre que $\varphi_0(p)\equiv 0$ contrairement à l'hypothèse.

On sait que le problème intérieur de Dirichlet relatif à Δ a une infinité de valeurs propres négatives et réelles;

$$0>-\lambda_1>-\lambda_2>-\lambda_3\cdots\to-\infty.$$

On en conclut que

Théorème 2. *Prenons un point λ_0, $Re\,\lambda_0\geq 0$, alors si $\lambda_0\neq\pm i\sqrt{\lambda_\nu}$, $\nu=1,2,3,\cdots$ (2) est toujours résoluble, et on a*

$$\psi(p;\lambda)=-\frac{dV}{dn_+}(p)-\int_S R(q,p\,|\,\lambda)\cdot\frac{dV}{dn_+}(q)dq, \textit{ au voisinage de } \lambda_0,$$

où $R(p,q\,|\,\lambda)$ est holomorphe en λ au voisinage de λ_0.

Considérons maintenant le cas singulier: $\lambda_0\in\{\pm i\sqrt{\lambda_\nu}\}$. Dans ce cas, on aura, au voisinage de ce point

$$R(p,q\,|\,\lambda)=\frac{\varphi_1(p)\psi_1(q)+\cdots+\varphi_s(p)\psi_s(q)}{(\lambda-\lambda_0)^m}$$
$$+(\text{termes d'ordre }\leq(m-1)\text{ en }(\lambda-\lambda_0)^{-1}).$$

où $\varphi_i(p)$, $\psi_j(q)$ $(i,j=1,2,\cdots,s)$ sont des fonctions propres correspondant à la valeur propre λ_0 de (1) et (2) respectivement. On peut supposer ici que les $\varphi_i(p)$ sont linéairement indépendantes, et $\psi_j(q)\not\equiv 0$.

Théorème 3. *Les pôles sont toujours simples, c'est-à-dire que $m=1$.*

En effet, en utilisant cette expression, on peut voir que le noyau de Green $G_i(P,Q;\lambda^2)$ de $(\lambda^2-\Delta)$ relatif au problème *intérieur* de Dirichlet s'exprime, au voisinage de $\lambda=\lambda_0$ par

$$G_i(P,Q:\lambda^2)=\frac{\Phi_1(P)\Psi_1(Q)+\cdots+\Phi_s(P)\Psi_s(Q)}{(\lambda-\lambda_0)^m}+\cdots,$$

où $\Phi_i(P)$ sont linéairement indépendantes, et $\Psi_j(Q)\not\equiv 0$. D'autre part, on sait que, d'après le théorème de Hilbert-Schmidt, le noyau de Green a toujours des pôles simples.

3. Construction explicite du noyau de Green $G(P,Q\,|\,\lambda)$ de l'opérateur $(\lambda^2-\Delta)$, $Re\,\lambda\geq 0$, relatif au problème extérieur de Neumann. D'après ce qui précède, on a

$$K_e(P,Q\,|\,\lambda)=-\frac{1}{2}\int_S E(P-q;\lambda)\frac{d}{dn_q}E(q-Q;\lambda)dq$$
$$-\frac{1}{2}\int_S\int_S E(P-q;\lambda)R(r,q\,|\,\lambda)\frac{d}{dn_r}E(r-Q;\lambda)dqdr.$$

Cette expression, qui est valable pour $Re\,\lambda>0$, est aussi valable pour tous les λ non singuliers. On voit que $K_e(P,Q\,|\,\lambda)$ est, pour $Re\,\lambda>0$, justement le noyau qui est traité dans L^2-cadre.[4] Maintenant, on va montrer le

Théorème 4. *Même aux points singuliers de $R(p,q|\lambda)$, $\lambda=\pm i\sqrt{\lambda_\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots)$, l'expression du second membre est régulière. En d'autres termes, $K_c(P,Q|\lambda)$ peut être prolongé analytiquement au delà de l'axe imaginaire, et les points $\pm i\sqrt{\lambda_\nu}$ ne sont que des pôles en apparence.*

En effet, au voisinage d'un point singulier λ_0 (imaginaire pure!), on a

$$R(p,q|\lambda)=\frac{\varphi_1(p)\psi_1(q)+\cdots+\varphi_s(p)\psi_s(q)}{\lambda-\lambda_0}+B(p,q|\lambda),$$

$B(p,q|\lambda)$ étant holomorphe au voisinage de λ_0. En substituant cette expression dans la formule ci-dessus, on a

$$K_c(P,Q|\lambda)=-\frac{1}{2(\lambda-\lambda_0)}\sum\int_S\psi_i(q)E(P-q;\lambda_0)dq\int_S\varphi_i(r)\frac{d}{dn_r}E(r-Q;\lambda_0)dr$$
$$+G_1(P,Q|\lambda)$$

G_1 étant holomorphe au voisinage de λ_0, ou encore

$$=-\frac{\Psi_1(P)\Phi_1(Q)+\cdots+\Psi_s(P)\Phi_s(Q)}{2(\lambda-\lambda_0)}+G_1(P,Q|\lambda).$$

Or, la fonction $\Psi_i(P)=\int_S\psi_i(q)E(P-q;\lambda_0)dq$ satisfait à $(\lambda_0^2-\Delta)\Psi_i=0$, pour P extérieur à S et $\frac{d}{dn_+}\Psi_i(p)=0$, pour tout $p\in S$. En tenant compte du comportement à l'infini de Ψ_i, on voit que $\Psi_i(P)\equiv 0$, pour P extérieur à S (Théorème de Rellich).

4. Relation entre le noyau de Green $G(P,Q|\lambda)$ et la fonction spectrale $\theta(P,Q|\mu)$. D'après Carleman ([1], p. 174–185), on sait que l'opérateur Δ relatif au problème extérieur de Neumann admet la fonction spectrale unique $\theta(P,Q|\mu)$:

$$f(P)\sim\int_{-\infty}^0 d_\lambda\int\theta(P,Q|\lambda)f(Q)dQ,$$

et si $f(Q)$ satisfait à la condition de Neumann: $\frac{df}{dn_+}(p)=0$ et $\in C^2$, et à support compact, cette intégrale est absolument convergente. De plus on a

$$u(P;\lambda^2)=\int G(P,Q|\lambda)f(Q)dQ=\int_{-\infty}^0\frac{1}{\lambda^2-\mu}\,d_\mu\int\theta(P,Q|\mu)f(Q)dQ,$$

pour $Re\,\lambda>0$, $f(P)$ satisfaisant aux conditions énumérées ci-dessus.

D'après la formule de Stieltjes,

$$\int_C u(P;\lambda^2)d(\lambda^2)=-2\pi i\int\theta(P,Q|-\lambda_0^2)f(Q)dQ,$$

4) Voir 1).

où C est un chemin quelconque dans la région $Re\,\lambda>0$, joignant le point $-i\lambda_0$ au point $+i\lambda_0$. Comme $u(P;\lambda^2)$ est holomorphe en λ au delà de l'axe imaginaire,

le premier membre$=\displaystyle\int_{\substack{-i\lambda_0\\ \text{L'axe imaginaire}}}^{+i\lambda_0} u(P;\lambda^2)d(\lambda^2)$ ou encore

$$=2\int_{-i\lambda_0}^{+i\lambda_0}\mu\,d\mu\int G(P;Q\,|\,\mu)f(Q)dQ.$$

C'est-à-dire que, pour $\lambda>0$, on a

$$2\int_{-i\sqrt{\lambda}}^{+i\sqrt{\lambda}}\mu\,d\mu\int G(P,Q\,|\,\mu)f(Q)dQ=-2\pi i\int\theta(P,Q\,|\,-\lambda)f(Q)dQ.$$

D'où, par dérivation,

$$\int\{G(P,Q\,|\,i\sqrt{\lambda})-G(P,Q\,|\,-i\sqrt{\lambda})\}f(Q)dQ$$
$$=+2\pi i\frac{\partial}{\partial(-\lambda)}\int\theta(P,Q\,|\,-\lambda)f(Q)dQ,$$

à savoir que, pour $\mu<0$,

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\int\theta(P,Q\,|\,\mu)f(Q)dQ \tag{3}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\{G(P,Q\,|\,i\sqrt{-\mu})-G(P,Q\,|\,-i\sqrt{-\mu})\}f(Q)dQ.$$

En posant le second membre$=\int\vartheta(P,Q\,|\,\mu)f(Q)dQ$, on a, pour tout $\omega(\lambda)$ continue et bornée,

$$\int_{-\infty}^{0}\omega(\lambda)d_\lambda\int\theta(P,Q\,|\,\lambda)f(Q)dQ=\int_{-\infty}^{0}\omega(\lambda)\left[\int\vartheta(P,Q\,|\,\lambda)f(Q)dQ\right]d\lambda, \tag{4}$$

où $\vartheta(P,Q\,|\,\lambda)$ est une fonction *analytique* en λ au voisinage de l'axe réel et négatif sauf à l'origine. $\vartheta(P,Q\,|\,\lambda)$ n'est plus du type du noyau de Carleman, mais il est localement à carré sommable en Q, P étant fixé. Enonçons le résultat.

Théorème 5. *La fonction spectrale $\theta(P,Q\,|\,\lambda)$ admet l'expression* (4), *où $\vartheta(P,Q\,|\,\lambda)$ est analytique en λ sauf à l'origine.*

Remarque finale. Carleman a montré le fait suivant: Etant données $u_0(P), u_1(P)$ de C^2, à support compact, et satisfaisant à la condition de Neumann sur S. Alors la solution $u(P,t)$ du problème aux limites:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)u(P,t)=0,\ \frac{du}{dn_+}=0,\ u(P,0)=u_0(P),\ \frac{\partial u}{\partial t}(P,0)=u_1(P),$$

jouit de la propriété: $u(P,t)\to 0$, pour $t\to+\infty$, (P étant fixé). Cela revient en essence à montrer que la fonction $\int\theta(P,Q\,|\,\lambda)f(Q)dQ$ est absolument continue en λ, excepté à l'origine. Il a esquissé sa démonstration, mais, la démonstration, nous semble-t-il, est assez délicate. Notre démonstration est tout-à-fait différente de celle de Carleman.

Récemment, M^{me} C. Morawetz a obtenu là-dessus un résultat plus précis pour le domaine extérieur au domaine étoilé ([4]).

Références

[1] T. Carleman: Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique (1923).
[2] H. G. Garnir: Les problèmes aux limites de la physique mathématique (1958).
[3] O. D. Kellogg: Foundations of potential theory (1929).
[4] C. S. Morawetz: The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation, Comm. pure app. math., **14**, 561–569 (1961).