4. *Sur une fonction continue qui est partout non dérivable*

By Shizu NAKANISHI

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Jan. 13, 1964)

Il y a un siècle que K. Weierstrass a donné une solution définitive au problème d'existence de la dérivée pour les fonctions continues les plus générales; il a montré, en effet, qu'il existe une série trigonométrique uniformément convergente mais qui n'a aucun point où la somme est dérivable. Depuis on a construit plusieurs exemples plus simples envisageant divers buts. Or, nous y ajouterons un autre; *nons donnerons un exemple d'une fonction réelle $f(x)$, définie pour $0\leq x\leq 1$ et intégrable E.R.,*[1] *dont l'intégrale indéfinie*

$$F(x)=(E.R.)\int_0^x f(t)\,dt \quad 0\leq x\leq 1$$

est une fonction continue sans dérivée.[2]

Notre exemple montre bien, d'une part, que l'intégrale *E.R.* indéfinie n'est pas toujours à variation bornée (car, d'après le théorème de H. Lebesque une telle fonction admettrait presque partout une dérivée finie) et, d'autre part, que l'intégrale *E.R.* diffère de celle de Denjoy-Perron ou même de Burkill. Mais, nons croyons que ce qui nous intêresse le plus c'est le fait que *la notion de l'intégration n'est pas toujours l'inverse de celle de la dérivation.*

Commençons par la définition d'ensemble $H[[a,b],l]$, où $[a,b]$ est un intervalle $a\leq x\leq b$ et l est un nombre positif ≥ 1. Définissons d'abord par récurrence, une famille dénombrable $\{L_{np}\}$ d'intervalles ouverts, deux à deux sans point commun, de la manière suivante:

L'entier n prend toutes les valeurs ≥ 1; pour chaque valeur de n, p prend les valeurs $1,2,\cdots,2^{n-1}$. Tous les intervalles L_{np} sont contenus dans $[a,b]$, et on prend $L_{11}=(c,d)$, où c et d sont deux points tels que $\dfrac{c+d}{2}$ est le point milieu de $[a,b]$ et $d-c=\dfrac{1}{4}\dfrac{b-a}{l}$. Supposons ensuite les 2^k-1 intervalles $L_{n,p}$ définis pour $1\leq n\leq k$, de sorte que, si M_k est leur réunion, l'ensemble $[a,b]\cap M_k^c$[3] sont la réunion de 2^k intervalles fermés $K_{kp}(p=1,2,\cdots,2^k$, de gauche à droite)

---

1) Pour la définition, voir Kinjirô Kunugi: Sur une généralization de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Mathematics, Research Institute of Applied Electricity, Hokkaido University, 1-30 (1960).

2) Dans la Note "S. Nakanishi: Sur la dérivation d'une intégrale *E.R.* indéfinie, Proc. Japan Acad., **37**, 316-318 (1961)," nous avons montré que l'intégrale *E.R.* indéfinie n'admet pas une dérivée en tout point d'ensemble de mesure positive.

3) M_k^c désigne complément de M_k.

deux à deux sans point commun, et ayant tous pour longeur $\frac{b-a}{2^k}$ $\left(1-\frac{1}{2l}+\frac{1}{2^{k+1}l}\right)$. Si $K_{kp}=[e,f]$, on prend alors pour $L_{k+1,p}$ l'intervalle ouvert (g,h) tel que g et h sont deux points définis de la manière que $\frac{g+h}{2}$ est le point milieu de $[e,f]$ et $h-g=\frac{1}{4^{k+1}}\frac{b-a}{l}$; on vérifie immédiatement que la récurrence peut se poursuivre. Si K' est le complémentaire de la réunion des L_{np}, on désigne l'ensemble fermé $[a,b]\cap K'$ par $H[[a,b],l]$. En particulier, si $l=1$, $a=0$ et $b=1$, il désigne l'ensemble de Harnack.

Définissons ensuite par récurrence une famille dénombrable $\{I_{n_1p_1,\,n_2p_2,\cdots,\,n_kp_k}\}$ d'intervalles ouverts contenus dans $[0,1]$ de la manière suivante:

L'entier n_i prend toutes les valeurs ≥ 1; pour chaque valeur de n_i, p_i prend les valeurs $1,2,\cdots,2^{n_i-1}$. Tous les intervalles $I_{n_1p_1,\,n_2p_2,\cdots,\,n_kp_k}$ sont contenus dans $[0,1]$, et on prend d'abord tous les intervalles ouverts $I_{n_1p_1}(p_1=1,2,\cdots,2^{n_1-1})$ contigus à l'ensemble fermé $H[[0,1],1]$, ayant pour longeur $1/4^{n_1}$, de gauche à droite. Supposons ensuite la famille d'intervalles ouverts $\{I_{n_1p_1}\}$, $\{I_{n_1p_1,\,n_2p_2}\},\cdots$, $\{I_{n_1p_1,\,n_2p_2,\cdots,\,n_kp_k}\}$ définis. Tous les intervalles $I_{n_1p_1,\cdots,\,n_kp_k,\,n_{k+1},\,p_{k+1}}$ sont contenus dans l'intervalle $I_{n_1p_1,\cdots,\,n_kp_k}$, et pour chaque nombre n_{k+1}, on prend tous les intervalles ouverts $I_{n_1p_1,\,n_2p_2,\cdots,\,n_{k+1}p_{k+1}}(p_{k+1}=1,2,\cdots,2^{n_{k+1}-1})$ contigus à l'ensemble fermé $H[I_{n_1p_1,\cdots,\,n_kp_k},4^{n_k}]$, ayant pour longeur $\frac{1}{8^{n_1+n_2+\cdots+n_k}4^{n_{k+1}}}$, de gauche à droite.

Désignons par $\mathfrak{I}_n$ la famille d'intervalles

$$I_{n_1p_1,\,n_2p_2,\cdots,\,n_kp_k} \text{ tels que } n_1+n_2+\cdots+n_k=n.$$

Passons à la définition d'une fonction voulue. Pour cela, d'abord on prend une suite d'entiers $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_m,\cdots$ tels que $\kappa_m=2^{m-1}$, et on définira une suite des fonctions en escalier.

$$\begin{array}{lllll}
r_0(x)(=r_{\kappa_1-1}(x)), & & & & \\
r_1(x)(=r_{\kappa_2-1}(x)), & r_2(x)=(r_{2\kappa_2-2}(x)), & & & \\
r_3(x)(=r_{\kappa_3-1}(x)), & r_4(x), & r_5(x), & r_6(x)(=r_{2\kappa_3-2}(x)) & \\
\cdots\cdots\cdots & & & & \\
r_{\kappa_m-1}(x), & r_{\kappa_m}(x), & \cdots\cdots\cdots, & r_n(x),\ \cdots\cdots\cdots, & r_{2\kappa_m-2}(x) \\
\cdots\cdots\cdots & & & &
\end{array}$$

de la manière suivante:

$$r_0(x)=\begin{cases} \dfrac{2^1}{1} & x\in H[I_{11},4], \\ 0 & \text{pour tous les autres } x, \end{cases}$$

$$r_1(x)=\begin{cases} \dfrac{2^2}{2} & x\in H[I_{11,11},4]\cup H[I_{21},4^2], \\ -\dfrac{2^2}{2} & x\in H[I_{22},4^2], \\ 0 & \text{pour tous les autres } x, \end{cases}$$

$$r_2(x)=\begin{cases} \dfrac{2^3}{3} & x\in H[I_{11,11,11},4]\cup H[I_{21,11},4]\cup \\ & \qquad H[I_{11,21},4^2]\cup H[I_{31},4^3]\cup H[I_{32},4^3], \\ -\dfrac{2^3}{3} & x\in H[I_{22,11},4]\cup H[I_{11,22},4^2]\cup H[I_{33},4^3]\cup H[I_{34},4^3], \\ 0 & \text{pour tous les autres } x, \end{cases}$$

....

En générale, pour $r_n(x)$ posons

$$r_n(x)=\begin{cases} \varepsilon_n(x)\cdot\dfrac{2^{n+1}}{n+1} & x\in \bigcup\{H[I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k},4^{n_k}],\ I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k}\in\mathfrak{J}_{n+1}\}, \\ 0 & \text{pour tous les autres } x, \end{cases}$$

où $\varepsilon_n(x)$ est une fonction à constante $+1$ ou -1 dans chacun d'ensembles $H(I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k},4^{n_k})$ tels que $I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k}\in\mathfrak{J}_{n+1}$, définie comme il suit:

Pour l'entier n, choisissons un entier $\kappa_m(=2^{m-1})$ uniquement déterminé tel que n s'écrit $n=\kappa_m-1+t$, $0\leq t\leq\kappa_m-1$, et définissons $\varepsilon_n(x)$ de la manière suivante:

i) si $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, $\varepsilon_n(x)$ suit le nombre $\varepsilon_{n-1}(x)$ dans $H(I_{n_1p_1,\cdots,n_{k-1}p_{k-1}},4^{n_{k-1}})$.

ii) si $n_1+n_2+\cdots+n_k$ est égale à $n-1, n-2,\cdots,\kappa_m$ ou κ_m-1 (où $n-1>n-2>\cdots>\kappa_m>\kappa_m-1$), $\varepsilon_n(x)$ prend $+1$ ou -1 selon que p_k est impair ou pair.

iii) si $n_1+n_2+\cdots+n_k\leq\kappa_m-2$, $\varepsilon_n(x)$ prend $+1$ ou -1 selon que $p_k=2^tl+1,\ 2^tl+2,\cdots,2^tl+2^t$ $(l=0,2,4,\cdots$ ou $l=1,3,5,\cdots)$.

Dans cette définition, on remarquera que le cas ii) est considéré seulement pour le cas où $n>\kappa_m-1$, sauf pour le cas où $n=\kappa_m-1$.

Désormais, montrons que si l'on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n(x)$, $f(x)$ est une fonction voulue. Pour le voir, montrons d'abord sans démonstration $f(x)$ est intégrable $E.R.$ dans un intervalle $[a,b]$ quelconque contenu dans $[0,1]$. Soit F_0 l'ensemble non-dense parfait de Harnack $H([0,1],1)$ contenu dans $[0,1]$, et définissons par récurrence l'ensemble F_n, $n=1,2,\cdots$, de la manière suivante:

$$F_n=F_{n-1}\cup(\bigcup\{H[I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k},4^{n_k}],\ I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k}\in\mathfrak{J}_n\}).$$

Posons $f_0(x)\equiv 0$ et $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}r_k(x)$, $k=1,2,\cdots$. On voit que $r_n(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F_n, et on a pour tout $n=1,2,\cdots$, $2^{-(n+1)}\leq\text{mes}([0,1]-F_n)\leq 2^{-(n-1)}$. Donc, si E est un ensemble contenu dans $[a,b]$ et dont la mesure est inférieur à celle de $[a,b]-F_n$, on a

$$\int_E |f_n(x)|\,dx\leq\frac{2}{n}.$$

On a de plus mes $([a,b]-F_n)\leq k$ mes $([a,b]-F_{n+1})$ pour tout n, où k est un entier positif ≥ 2 dépendant seulement d'intervalle $[a,b]$, et on a $\left|\int_a^b r_n(x)\,dx\right|<3.2^{-\frac{n}{4}}$.

Ainsi, si l'on pose

$$F^*_{2n} = F^*_{2n+1} = [a, b] \cap F_n,$$
$$f^*_{2n}(x) = f^*_{2n+1}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & x \bar{\in} [a, b], \end{cases}$$

on voit que

$$V(F^*_0, 0; f^*_0),\ V(F^*_1, 1; f^*_1),\ V(F^*_2, 2; f^*_2), \cdots,\ V(F^*_n, n; f^*_n), \cdots$$

est une suite étoilée.[4] Donc, la fonction $f(x)$ est intégrable $E.R.$ dans l'intervalle $[a, b]$ quelconque contenu dans $[0, 1]$.

Passons ensuite à la démonstration suivante:

Si l'on pose $F(x) = (E.R.) \int_0^x f(t)\, dt$, $F(x)$ est une fonction continue qui n'est pas dérivable en tout point x appartenant à $[0, 1]$. Pour le voir, montrons d'abord que si $x \in [0, 1]$ est un point quelconque appartenant à un $H[I_{n_1 p_1, \cdots, n_t p_t}, 4^{n_t}]$, on a $\overline{D}F(x) \neq \underline{D}F(x)$. Posons $n_0 = \sum_{i=1}^{t} n_i$, et désignons par

$$J_{n_0+k, 1},\ J_{n_0+k, 2}, \cdots,\ J_{n_0+k, 2^k}$$

tous les intervalles (fermés ou semi-fermés) contigus à l'ensemble ouvert

$$\bigcup_{i=1}^{k} \left(\bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} I_{n_1 p_1, \cdots, n_t p_t, ij} \right)$$

et contenus dans $I_{n_1 p_1, \cdots, n_t p_t}$.

Soient m_0 un entier positif uniquement déterminé tel que $\kappa_{m_0} \leq n_0 \leq \kappa_{m_0+1} - 1$, et k_m les entiers >0 tels que $k_m = \kappa_m - 1 - n_0$ pour tout $m > m_0 + 1$. Puisqu'on a $\bigcup_{s=1}^{2k} J_{n_0+k, s} \ni x$ pour tout $k > 0$, il existe un intervalle $J_{n_0+k_m, s_m}$ contenant le point x pour tout k_m. Posons $I_m = J_{n_0+k_m, s_m}$ simplement. Alors, on verra que

si s_m est impair, on a

1) $\dfrac{F(I_m)}{|I_m|} > \varepsilon \cdot \dfrac{2^{n_0}}{n_0} + \dfrac{2^{n_0+1}}{8^{n_t} - 1}$ pour m suffisamment grand,

si s_m est pair, on a

2) $\dfrac{F(I_m)}{|I_m|} < \varepsilon \cdot \dfrac{2^{n_0}}{n_0} - \dfrac{2^{n_0+1}}{8^{n_t} - 1}$ pour m suffisamment grand,

où ε est $+1$ ou -1 selon que $r_{n_0-1}(x)$ est positif ou négatif sur l'ensemble $H[I_{n_1 p_1, \cdots, n_t p_t}, 4^{n_t}]$.

Dautre part, puisqu'il existe au moins un intervalle $I_{n_1 p_1, \cdots, n_t p_t, k_m j}$ contigu à $J_{n_0+k_m, s_m}$ défini plus haut pour tout k_m, on peut prendre l'intervalle K_m défini de la manière que

$$K_m = J_{n_0+k_m, s_m-1} \cup I_{n_1 p_1, \cdots, n_t p_t, k_m j} \cup J_{n_0+k_m, s}$$

ou

$$K_m = J_{n_0+k_m, s_m} \cup I_{n_1 p_1, \cdots, n_t p_t, k_m j} \cup J_{n_0+k_m, s}$$

4) Cf. loc. cit. 1), p. 20.

selon que $I_{n_1p_1,\cdots,n_tp_t,k_mj}$ est contigu à main gauche ou à main droite de $J_{n_0+k_m,s}$. Pour la suite d'intervalles $\{K_m\}$ ainsi définis, on a $K_m \ni x$ et de plus on a

3) $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{F(K_m)}{|K_m|}=\varepsilon\dfrac{2^{n_0}}{n_0}$, où ε est un nombre défini plus haut.

Conséquemment, par 1), 2), et 3), il s'ensuit que $\overline{D}F(x)\neq\underline{D}F(x)$ pour le point x.

Montrons ensuite que si $x\in[0,1]$ est un point quelconque n'appartenant pas à tous l'ensembles $H[I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k},4^{n_k}]$, on a l'une au moins des $\overline{D}F(x)=+\infty$, $\underline{D}F(x)=-\infty$. Pour le voir, si l'on prend une suite d'intervalles

$$I_{n_1p_1},\ I_{n_1p_1,n_2p_2},\ I_{n_1p_1,n_2p_2,n_3p_3},\cdots,\ I_{n_1p_1,n_2p_2,\cdots,n_kp_k},\cdots$$

tels que $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k}=\{x\}$, on a toujours

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|F(I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k})|}{|I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k}|}=+\infty.$$

Donc, on a pour un tel point x l'une au moins des égalités

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{F(I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k})}{|I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k}|}=+\infty,\quad \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{F(I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k})}{|I_{n_1p_1,\cdots,n_kp_k}|}=-\infty,$$

par conséquent

$$\overline{D}F(x)=+\infty,\quad \underline{D}F(x)=-\infty.$$