2. *Quelques remarques sur les groupes algébriques réels*

Par Hideya MATSUMOTO
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M.J.A., Jan. 13, 1964)

1. Le but de cette note est d'appliquer un résultat de I. Satake [6] à quelques questions sur les groupes algébriques linéaires réels: on étudie la connexion topologique d'un groupe algébrique irréductible, les automorphismes d'une algèbre de Lie semi-simple et les classes de conjugaison, respectivement des sous-algèbres résolubles maximales et des sous-algèbres de Cartan, d'une algèbre de Lie semi-simple.

L'exposé détaillé avec démonstrations paraîtra ultérieurement.

L'auteur désire exprimer ici sa profonde reconnaissance à M. N. Iwahori et M. T. Nagano, qui ont bien voulu diriger ses études.

2. Rappelons brièvement un résultat dans [6] sur lequel on s'appuiera dans ce qui suit.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\boldsymbol{R}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}_u$ une forme réelle compacte de $\tilde{\mathfrak{g}}$ telle que l'involution τ associée à $\mathfrak{g}_u$ commute à l'involution σ associée à $\mathfrak{g}$: on a alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}_u$ et $\mathfrak{p}=\mathfrak{g}\cap\sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_u$. Soit $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^++\mathfrak{h}^-$ ($\mathfrak{h}^+=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}, \mathfrak{h}^-=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$) une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h}^-$ soit une sous-algèbre maximale dans $\mathfrak{p}$. La complexifiée $\tilde{\mathfrak{h}}$ de $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}$: soit Σ le système de racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$ relatif à $\tilde{\mathfrak{h}}$, une racine étant identifiée avec un élément de $\mathfrak{h}_0=\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}^++\mathfrak{h}^-$ en utilisant la restriction à $\tilde{\mathfrak{h}}$ de la forme de Killing de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soit $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ un système fondamental de Σ tel qu'on ait, pour toute racine positive β,

$$\sigma\beta=-\beta \text{ ou bien } \sigma\beta>0.$$

On sait alors la proposition suivante (voir [6], proposition 2):

Proposition A. *Si* $(\mathfrak{g}_u^*, \mathfrak{h}^*, \Delta^*)$ *est un autre système satisfaisant aux mêmes conditions que* $(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{h}, \Delta)$, *il existe un automorphisme intérieur* ξ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\xi(\mathfrak{g}_u)=\mathfrak{g}_u^*$, $\xi(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}^*$ *et* $\xi(\Delta)=\Delta^*$, ξ *s'étendant canoniquement en un automorphisme de* $\tilde{\mathfrak{g}}$.

$\sigma_0=\sigma\,|\,\mathfrak{h}_0$ peut être écrit sous la forme $\sigma_0=s_0r_0=r_0s_0$ où s_0 est dans le groupe de Weyl W associé à Σ et r_0 transforme Δ en lui-même. On notera W_σ le sous-groupe de W composé des éléments commutant à σ_0.

Le schéma de Satake-Tits de $\mathfrak{g}$, désigné par le symbole (Δ, σ), est le schéma obtenu, à partir du schéma de Dynkin de $\tilde{\mathfrak{g}}$ représentant $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$, en marquant les sommets dans $\Delta_0=\Delta\cap\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}^+$ et en indiquant la permutation involutive r_0 par des flèches (cf. [6] et J. Tits [8]).

Soit Δ' un sous-ensemble de Δ tel que le sous-espace de $\mathfrak{h}_0$ sous-tendu par les éléments dans Δ' soit laissé invariant par σ_0: il existe alors une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ telle que (Δ', σ) soit le schéma de Satake-Tits de $\mathfrak{g}'$ (voir [6]). Le schéma (Δ', σ) s'appellera un sous-schéma de (Δ, σ).

Si $\mathfrak{g}$ est de la première [resp. seconde] catégorie, le schéma de Satake-Tits (Δ, σ) de $\mathfrak{g}$ sera dit de la première [resp. seconde] catégorie. $\mathfrak{g}$ est de la première catégorie si et seulement si $\mathfrak{g}$ possède une sous-algèbre de Cartan compacte: (Δ, σ) est de la première catégorie si et seulement si $-\sigma_0$ appartient à W. En particulier le schéma vide est de la première catégorie.

3. On sait bien que tout groupe algébrique irréductible complexe est topologiquement connexe. Soient maintenant M un groupe algébrique irréductible réel et M^0 la composante connexe topologique de l'élément neutre dans M: soient U le plus grand sous-groupe unipotent distingué de M et G un sous-groupe réductif maximal de M. Alors M est le produit semi-direct de U par G, U étant topologiquement connexe.

En appliquant à G la proposition A, on obtient le

Théorème 1. (i) *Si D est un sous-groupe algébrique irréductible $\boldsymbol{R}$-diagonalisable maximal de M, on a $M = M^0 D$.*

(ii) *M possède un sous-groupe fini S composé d'éléments involutifs tel que M soit le produit semi-direct de M^0 par S.*

4. Etant donnée une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ sur $\boldsymbol{R}$, soient G le groupe algébrique des automorphismes de $\mathfrak{g}$, G_1 [resp. G^0] la composante irréductible [resp. connexe topologique] de l'élément neutre dans G. La structure du groupe quotient G/G^0 a déjà été déterminée par E. Cartan [2] (cf. aussi S. Murakami [5]).

Pour retrouver ce résultat de Cartan, on y applique la proposition A et le théorème 1. A l'aide de quelques vérifications utilisant la classification des algèbres de Lie simples, on peut démontrer le

Théorème 2. *G possède un sous-groupe fini S tel que*

(i) *G soit le produit semi-direct de G^0 par S; et*

(ii) *S_1 étant $S \cap G_1$, S soit le produit semi-direct de S_1 par un sous-groupe E de S.*

Et puis on peut déterminer un tel sous-groupe S explicitement pour chaque algèbre de Lie simple et on retrouve "presque généralement" la

Proposition 1. *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit simple. Alors le groupe quotient G/G^0 se compose d'éléments involutifs sauf dans l'un des cas suivants:* 1) $\mathfrak{g}$ *est isomorphe à la restriction scalaire de l'algèbre* *de Lie simple complexe de type* (D_4), 2) $\mathfrak{g}$ *est isomorphe à la forme réelle compacte de type* (D_4), 3) $\mathfrak{g}$ *est isomorphe à l'une des formes réelles normales de types* (D_{2n}) $(n \geq 2)$.

5. Employant les notations des paragraphes 2 et 4, on considère les classes de conjugaison des sous-algèbres résolubles maximales [resp. de Cartan] de $\mathfrak{g}$ sous les opérations de G_1.

Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre résoluble maximale de $\mathfrak{g}$. G. D. Mostow a caractérisé la forme de $\mathfrak{s}$, démontrant que $\mathfrak{s}$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ (voir [4], théorème 4.1). On en déduit que, $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ étant le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de la partie vectorielle $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{s}+\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ ayant une sous-algèbre semi-simple maximale de la première catégorie.

On peut ainsi réduire la question de conjugaison pour les sous-algèbres résolubles maximales de $\mathfrak{g}$ à celle pour les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$: d'autre part, les classes de conjugaison de ces dernières sont bien connues (cf. J. Tits [1]). On a alors le

Théorème 3. *Il existe une correspondance bi-univoque entre les classes de conjugaison des sous-algèbres résolubles maximales de* $\mathfrak{g}$ *sous les opérations de* G_1 *et les sous-schémas de* (Δ, σ) *contenant* Δ_0 *et étant de la première catégorie.*

Les classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ ont été déterminées par M. Sugiura [7] (cf. aussi B. Kostant [3]).

S'appuyant sur la proposition A et utilisant un raisonnement analogue à celui qu'on vient de faire, on peut simplifier un peu la méthode de Sugiura: on a le

Théorème 4. *Il existe une correspondance bi-univoque entre les classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *sous les opérations de* G_1 *et les classes de conjugaison des sous-schémas de* (Δ, σ) *contenant* Δ_0 *et étant de la première catégorie sous les opérations de* W_σ.

Remarquons enfin que les classes de conjugaison des sous-algèbres résolubles maximales [resp. de Cartan] de $\mathfrak{g}$ sous les opérations de G^0 sont identiques avec celles sous les opérations de G_1.

Références

[1] J. Tits: Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples. Séminaire Bourbaki, exposé 119 (1955).

[2] E. Cartan: Sur certaines formes rimanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **44**, 345–467 (1927).

[3] B. Kostant: Conjugacy of real Cartan subalgebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **41**, 967–970 (1955).

[4] G. D. Mostow: On maximal subgroups of real Lie groups. Ann. of Math., **74**, 503–517 (1961).

[5] S. Murakami: On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra. J. Math. Soc. Japan, **4**, 103–133 (1950); **5**, 105–112 (1951).

[6] I. Satake: On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces. Ann. of Math., **71**, 77–110 (1960).

[7] M. Sugiura: Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras. J. Math. Soc. Japan, **11**, 374–434 (1959).

[8] J. Tits: Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, dans "Algebraical and topological foundations of geometry". 175–192 (1962).