# 133. Über die Klassenzahl eines relativ-zyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrade

Von Sige-Nobu KURODA

Mathematisches Institut, Universität zu Tokyo

(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M.J.A., Oct. 12, 1964)

In den folgenden Zeilen beweisen wir einige Sätze über die Klassenzahl eines (relativ-)zyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrade.

Satz 1. *Es sei $K/k$ ein relativ-zyklischer Zahlkörper vom Primzahlgrade $l$ derart, dass es ein und nur ein zwischen $K$ und $k$ verzweigtes (endliches) Primideal von $k$ gibt. Es bezeichne $h_k$ bzw. $h_K$ die Klassenzahlen von $k$ und $K$. (Dann ist bekanntlich $h_K$ teilbar durch $h_k$.) Wenn $h_k$ zu $l$ prim ist, dann gilt*

$$h_K/h_k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ l).^{1)}$$

*Wenn es ferner keine zwischen $K$ und $k$ verzweigte unendliche Primstelle gibt, dann ist jede Einheit von $k$ Norm einer Einheit von $K$.*

Genauer gilt der

Zusatz 1. *Es genüge $K/k$ den Bedingungen im Satz 1 ausgenommen der letzten Bedingung über unendliche Stelle. Ferner sei $K/k_0$ ein relativ-zyklischer Zahlkörper vom $l^n$-ten Grade ($n \geq 1$) derart, dass $K \supset k \supset k_0$ gilt. $p$ bedeute eine beliebige Primzahl. Es sei $(h_K/h_k)_p$ der $p$-Betrag von $h_K/h_k$. Dann gilt*

$$(h_K/h_k)_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ l^n).$$

*Anders gesagt ist $h_K/h_k$ Norm (im rationalen Zahlkörper $Q$) eines zu $l$ primen ganzen Ideals aus dem Wertkörper der zur Galoisgruppe von $K/k_0$ gehörigen einfachen Charaktere.*[2)]

Es sei noch bemerkt, dass der Typus der Primzerlegung von $h_K$ wie folgt eingeschränkt wird. $\mathfrak{P}$ sei ein (und nur ein) zwischen $K/k_0$ verzweigtes Primideal von $K$. $k_0$ darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Trägheitskörper von $\mathfrak{P}$ angenommen werden. Es sei ferner $K = k_n \supset k_{n-1} \supset \cdots \supset k_0$ die Reihe der sämtlichen Zwischenkörper von $K/k_0$, und es bezeichne $h_i$ die Klassenzahl von $k_i$. Dann folgt aus dem obigen Zusatz, dass $h_n/h_0$ wie $\prod_{i=1}^{n} h_{\chi_i}$ zerlegt wird, wo $h_{\chi_i} = h_i/h_{i-1}$ Norm (in $Q$) eines zu $l$ primen ganzen Ideals aus dem Wertkörper der zur Galoisgruppe von $k_i/k_0$ gehörigen einfachen Charaktere.[2)]

1) Ein Satz von Iwasawa [3] besagt, dass unter diesen Voraussetzungen $h_K$ zu $l$ prim ist. Für den absoluten Fall siehe auch Leopoldt [5] und Moriya [7].

2) Leopoldt [6] hat eine Zerlegungsformel für die Klassenzahl der beliebigen reellen abelschen absoluten Zahlkörpers $K$ gewonnen (Satz 21), die einen Faktor $\Pi h_{\tilde{\chi}}$ enthält, wo $\tilde{\chi}$ eine Abteilung der Charaktergruppe der Galoisgruppe von $K/\mathrm{Q}$, und $h_{\tilde{\chi}}$ die Norm (in $Q$) eines ganzen Ideals aus dem Wertkörper der zu $\tilde{\chi}$ gehörigen einfachen Charaktere.

Im absoluten Fall gilt der

Satz 2. *K sei ein absolut zyklischer Zahlkörper vom ungeraden Primzahlgrade l und h die Klassenzahl von K. t bedeute die Anzahl der in der Diskriminante von K aufgehenden verschiedenen Primzahlen. Dann gilt*

$$h \equiv \begin{cases} 1 \pmod{l}, & \textit{wenn } t=1, \\ 0 \pmod{l^{t-1}}, & \textit{wenn } t>1. \end{cases}$$

*Ferner ist die Geschlechteranzahl gleich* $l^{t-1}$.[3]

Über die Klassenzahl im engeren Sinne (diesmal einschliesslich des Falles $l=2$) gilt der

Satz $2^+$. *K sei ein absolut zyklischer Zahlkörper vom Primzahlgrade l und* $h^+$ *die Klassenzahl im engeren Sinne von K. t habe dieselbe Bedeutung wie im Satz 2. Dann gilt*

$$h^+ \equiv \begin{cases} 1 \pmod{l}, & \textit{wenn } t=1, \\ 0 \pmod{l^{t-1}}, & \textit{wenn } t>1. \end{cases}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der wohlbekannten Tatsache in der Theorie des quadratischen Zahlkörpers.

Beweis von Satz 1. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Nichthauptideal von $k$. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{a}$ in $K$ ein Hauptideal wäre, so wäre auch $N_{K/k}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^l$ in $k$ ein Hauptideal. Aber dies ist unmöglich, da $h_k$ zu $l$ prim ist. Also sind die zwei Ideale von $k$, die in $k$ nicht äquivalent sind, auch in $K$ nicht äquivalent. Daher gibt es genau $h_k$ ambige Klassen von $K$, die je ein Ideal von $k$ enthalten. Es sei $\mathfrak{A}$ die Untergruppe der Klassengruppe $\mathfrak{C}$ von $K$, die diese $h_k$ ambigen Klassen bilden. Ferner sei $\mathfrak{B}$ die Untergruppe von $\mathfrak{C}$, die durch allen Klassen gebildet wird, deren Normen bezüglich $k$ in der Hauptklasse von $k$ enthalten sind.[4] Dann gilt

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \quad \text{(direkt)}. \tag{1}$$

Denn erstens enthält $\mathfrak{B}$ ersichtlich keine von der Hauptklasse verschiedene Klasse aus $\mathfrak{A}$. Zweitens sei $C$ eine beliebige Klasse von $K$ und $c_k$ die Klasse von $k$, die Norm von $C$ enthält. Dann ist $C = C'_k \times C'$, wo $C'_k$ diejenige Klasse aus $\mathfrak{A}$, deren Norm in $c_k$ enthalten, und $C'$ eine Klasse von $K$, deren Norm in der Hauptklasse von $k$ enthalten ist. Also gilt (1). Nun sei $C_1$ eine von Hauptklasse verschiedene Klasse aus $\mathfrak{B}$. Dann sind $l$ zu $C_1$ konjugierte Klassen voneinander verschieden. Denn sonst wäre die $l$-te Potenz von $C_1$ die Hauptklasse. Aber dies ist unmöglich, da $h_K$ zu $l$ prim ist.[5] Wenn es in $\mathfrak{B}$ eine Klasse $C_2$ gibt, die nicht die Hauptklasse von $K$ und nicht eine zu $C_1$ konjugierte Klasse ist, dann sind alle $l$ Klassen, die zu $C_2$ konjugiert

3) Es ist schon bewiesen in Iyanaga-Tamagawa [4] und Leopoldt [5], dass die Anzahl der Geschlechter *im engeren Sinne* gleich $l^{t-1}$ ist.

4) Für die Norm einer Klasse, siehe Moriya [8].

5) Siehe Anmerkung 1).

sind, verschieden von der Hauptklasse und von den zu $C_1$ konjugierten Klassen. Dies sieht man leicht aus der Tatsache ein, dass die Galoisgruppe von $K/k$ auf die konjugierten Klassen transitiv wirkt. Also ist die Ordnung von $\mathfrak{B}$ 1 modulo $l$. Daraus folgt $h_K/h_k \equiv 1 \pmod{l}$. Nach der direkten Zerlegung (1) von $\mathfrak{C}$ und der oben gesagten Tatsache, dass die $l$ zu einer Klasse $C_1$ $(\neq 1)$ von $\mathfrak{B}$ konjugierten Klassen voneinander verschieden sind, sieht man leicht ein, dass jede ambige Klasse von $K$ in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Andererseits ist die Anzahl $a$ der ambigen Klassen, die je ein ambiges Ideal enthalten, gegeben durch die Formel:

$$(2)\qquad a = \frac{h_k \prod_{\mathfrak{p}} e(\mathfrak{p})}{(H : E^{1-\sigma})},$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale von $k$ durchläuft und $e(\mathfrak{p})$ den gewöhnlichen Sinn hat, $\sigma$ ein erzeugendes Element der Galoisgruppe von $K/k$ ist, und $H$ die Gruppe der Einheiten von $K$ ist, deren Norm bezüglich $k$ gleich eins sind, und schliesslich $E$ die Gruppe aller Einheiten von $K$ ist.[6] Daher haben wir $(H : E^{1-\sigma}) = l$ in unserem Falle. Es gilt auch bekanntlich

$$(3)\qquad \frac{(H : E^{1-\sigma})}{(\varepsilon : NE)} = \frac{l}{2^{\rho}},$$

wo $\varepsilon$ die Einheiten von $k$ sind, $\rho$ die Anzahl der zwischen $K$ und $k$ verzweigten unendlichen Primstellen von $k$ ist, und schliesslich $N$ die Norm von $K$ in $k$ bezeichnet.[7] Unsere Voraussetzung bedeutet $\rho = 0$. Weil $(H : E^{1-\sigma}) = l$ ist, folgt $(\varepsilon : NE) = 1$.

Beweis vom Zusatz 1. $(h_K/h_k)_p - 1$ ist die Anzahl der Klassen $(\neq 1)$ aus $\mathfrak{B}$, deren Ordnungen je eine Potenz von $p$ sind. Das erzeugende Element $\tau$ der Galoisgruppe von $K/k_0$ lässt $\mathfrak{B}$ fest, aber jede Potenz $(\neq 1)$ von $\tau$ lässt nicht jede Klasse $(\neq 1)$ aus $\mathfrak{B}$ fest, da $\sigma = \tau^{l^{n-1}}$ jede Klasse $(\neq 1)$ aus $\mathfrak{B}$ nicht festlässt. Daraus folgt also $(h_K/h_k)_p \equiv 1 \pmod{l^n}$, weil die zueinander konjugierten Klassen dieselbe Ordnung haben.

Beweis vom Satz 2. Die erste Kongruenz folgt unmittelbar aus dem Satz 1. Weil $l$ ungerade ist und $-1, 1$ die sämtliche Einheiten des rationalen Zahlkörpers sind, ist $a$ genau $l^{t-1}$, wenn die Diskriminante von $K$ genau $t$ verschiedene Primzahlen enthält. Dies ersieht man leicht aus (2) und (3), da in unserem Falle $\rho = 0$ ist. Es gibt auch keine ambige Klasse, die ein ambiges Ideal nicht enthält, da $-1$ und 1 Normen der Einheiten von $K$ sind. Also ist $a$ gleich der Anzahl der ambigen Klassen, folglich der der geschlechter. w.z.b.w.

Unter Berücksichtigung der in Anmerkung 3) zitierten Tatsache

6) Siehe dazu etwa Hasse [1], S. 275 oder Takagi [9], S. 192.

7) Siehe dazu etwa Iyanaga [3], S. 33 oder Takagi [9], S. 194.

erhalten wir den folgenden

Zusatz 2. *Es sei $K$ ein absolut zyklischer Zahlkörper vom ungeraden Primzahlgrade. Dann ist die Anzahl der Geschlechter* (*im gewöhnlichen Sinne*) *gleich der der Geschlechter im engeren Sinne.*

Beweis von Satz $2^+$. Falls $l=2$ ist, ist die Behauptung wohlbekannt. Also sei $l$ ungerade. Die zweite Kongruenz folgt unmittelbar aus Satz 2. Zum Beweis der ersten Kongruenz genügt es offenbar den folgenden Hilfssatz zu beweisen.

Hilfssatz. $h^+/h\equiv 1 \pmod{l}$, *wenn* $l\neq 2$ *ist.*
(Dabei ist $t=1$ nicht vorausgesetzt.)

Beweis. Es sei $P$ bzw. $P^+$ die Gruppe aller Hauptideale von $K$ bzw. die Gruppe der Hauptideale von $K$, die je durch eine totalpositive Zahl erzeugt werden. Dann ist $h^+/h=(P:P^+)$. Es sei $(\alpha)$ ein Hauptideal, das nicht zu $P^+$ gehört. Dann gilt $(\alpha)^\sigma P^+\neq(\alpha)P^+$. Denn sonst wäre die Anzahl der ambigen Klassen im engeren Sinne grösser als die der ambigen Klassen im gewöhnlichen Sinne, was nach Zusatz 2 unmöglich ist. Wie im Beweis von Satz 1 folgt also $h^+/h\equiv 1 (\mathrm{mod}\, l)$.

Schliesslich sei es noch bemerkt, dass man nach Satz 1 das Resultat von Yokoi [10] in einigen Fällen etwas genauer machen kann.

## Literatur

[1] H. Hasse: Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil Ia. Jber. D. M. V., **36**, 233-311 (1927).

[2] K. Iwasawa: A note on class numbers of algebraic number fields. Abh. Math. Sem. Hamburg, **20**, 257-258 (1956).

[3] S. Iyanaga: Class-field theory notes, Vorlesungsausarbeitung. Univ. of Chicago (1961).

[4] S. Iyanaga und T. Tamagawa: Sur la théorie du corps de classes sur le corps des nombres rationnels. J. Math. Soc. Jap., **3**, 220-227 (1951).

[5] H. W. Leopoldt: Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern. Math. Nachr., **9**, 351-362 (1953).

[6] ——: Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper. Abh. Deutsch. Akad. d. Wiss. zu Berlin, math.-naturw. Klasse, 1953, Nr. 2 (1954).

[7] M. Moriya: Über die Klassenzahl eines relativ-zyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrad. Proc. Japan Acad., **6**, 245-247 (1930).

[8] ——: Ueber die Klassenzahl eines relativzyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrad. Jap. J. Math., **10**, 1-18 (1933).

[9] T. Takagi: Theorie der algebraischen Zahlen (Japanisch). Iwanami, Tokyo (1948).

[10] H. Yokoi: On unit groups of absolute abelian number fields of degree $pq$. Nagoya Math. J., **16**, 73-81 (1960).