66. *Sur une Représentation de la Fonction Delta de Dirac.* II

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka Préfecture

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., April 12, 1965)

Commençons par remarquer que Théorème 1 donné dans la Note I[1] précédente subsiste de même *pour toute fonction* $\varphi(x)$ *intégrable au sens de Lebesque (pas nécessairement bornée) et continue au point* $x=0$.

En effect, puisque la fonction $\varphi(x)$ est continue au point $x=0$, il existe un entier positif n_0 et un nombre N tels que $|\varphi(x)|<N$ dans l'intervalle $0\leq x\leq 1/n_0$. Désignons par M l'integrale de la fonction $|\varphi(x)|$. Désignons par $\{e_n\}$ une suite monotone décroissante des nombres positives tels qu'on ait $\int_E |\varphi(x)|\,dx<e_n$, quel que soit l'ensemble E dont la mesure lebesguinne est inférieur à $1/n$. On voit aussitôt qu'il suffit de montrer qu'it existe une suite des nombres positives $\{\varepsilon_n^*\}$ convergeant vers 0 telle qu'on ait $\int_B |f_n(x)|<\varepsilon_n^*$ pour tout ensemble B dont la mesure $\nu(B)$ est inférieur à $\nu(CA_n)$. On a d'abord

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_B \Big|\sum_{j=1}^{n}(j+1)\,\eta_j(x)\,\varphi(x)\Big|\,dx \\ &= \sum_{j=1}^{n_0-1}(j+1)\int_B \eta_j(x)\,|\varphi(x)|\,dx+\sum_{j=n_0}^{n}(j+1)\int_B \eta_j(x)\,|\varphi(x)|\,dx \\ &\leq n_0\int_{B_1\cup B_2}|\varphi(x)|\,dx+(n+1)\,N\cdot\mathrm{mes}(B_1\cup B_2)\leq n_0e_n+N/(n+1). \end{aligned}$$

Posons maintenant $B_{ji}=B\cap\{x;\,a_{j,j-i-1}<x\leq a_{j,j-i}\}$ et $B_{ji}^*=\{\lambda_{ji}(x);\,x\in B_{ji}\}$. On a alors mes $B_{ji}^*=j(j^2-1)/i(i+1)\cdot$mes $B_{ji}\leq j(j^2-1)$ mes B_{ji}. Donc, on a $\sum_{i=1}^{j-1}$ mes $B_{ji}^*=j(j^2-1)\sum_{i=1}^{j-1}$ mes $B_{ji}\leq j(j^2-1)/(n+1)^2$, d'où

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{j=2}^{n_0}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i(i+1)}{j(j-1)}\int_{B_{ji}}|\varphi(\lambda_{ji}(x))|\,\lambda_{ji}'(x)\,dx \\ &\leq n_0(n_0+1)\sum_{j=2}^{n_0}\frac{1}{j(j-1)}\sum_{i=1}^{j-1}\int_{B_{ji}^*}|\varphi(x)|\,dx \\ &\leq n_0(n_0+1)\sum_{j=2}^{n_0}\frac{j(j^2-1)e_n}{j(j-1)}<(n_0+1)^4e_n. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

1) S. Nakanishi: Sur une Représentation de la Fonction Delta de Dirac. I. Proc. Japan Acad., **41**, 138-140 (1965).

$$I_2 = \sum_{j=n_0+1}^{n} \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{i(i+1)}{j(j-1)} \int_{B_{ji}} |\varphi(\lambda_{ji}(x))| \lambda'_{ji}(x)$$
$$\leq n_0(n_0-1)\left\{\sum_{j=n_0+1}^{[n^{1/3}]^{2)}} \frac{1}{j(j-1)} \sum_{i=1}^{n_0-1} \int_{B^*_{ji}} |\varphi(x)|\, dx \right.$$
$$\left. + \sum_{j=[n^{1/3}]+1}^{n} \frac{1}{j(j-1)} \sum_{i=1}^{n_0-1} \int_{B^*_{ji}} |\varphi(x)|\, dx\right\}.$$

Or, on a pour tout j tel que $n_0+1 \leq j \leq [n^{1/3}]$,

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} \text{mes } B^*_{ji} \leq j(j^2-1) \sum_{i=1}^{n_0-1} \text{mes } B_{ji}$$
$$\leq n^{1/3}(n^{2/3}-1)/(n+1)^2 < 1/(n+1).$$

Donc, il s'ensuit que

$$I_2 \leq n_0(n_0-1)\{\sum_{j=n_0+1}^{[n^{1/3}]} e_n/j(j-1) + \sum_{j=[n^{1/3}]+1}^{n} M/j(j-1)\}$$
$$\leq e_n/n_0 + M/[n^{1/3}].$$

On a enfin

$$I_3 \leq \sum_{j=n_0+1}^{n} \sum_{i=n_0}^{j-1} \frac{i(i+1)}{j(j-1)} \int_{B_{ji}} |\varphi(\lambda_{ji}(x))| \lambda'_{ji}(x)dx$$
$$= \sum_{j=n_0+1}^{n} \sum_{i=n_0}^{j-1} (j+1) \int_{B_{ji}} |\varphi(\lambda_{ji}(x))|\, dx$$
$$\leq (n+1)N \text{ mes } (B_1 \cup B_2) \leq N/(n+1).$$

Conséquemment, si l'on pose $\varepsilon^*_n = 6\max(N/(n+1), M/[n^{1/3}], (n_0+1)^4 e_n)$, on a $\int_B |f_n(x)|\, dx \leq I_0 + I_1 + I_2 + I_3 \leq \varepsilon^*_n$.

Nous allons ici donner *une représentation de la fonction Delta de Dirac, relativement à la sommation* $(C, 1)$ *de série de Fourier.* Nous utilisons encore, pour l'intégrale, l'intégrale (E.R. ν), où ν est une mesure définie par $\nu(A) = \int_A x^{-2} e^{-1/|x|} dx$. Désignons par $D_n(x)$ le noyau de Dirichlet, et par $D^*_n(x)$ la fonction $\sin nx/2\tan x/2$.

Pour tout entier $j = 1, 2, \cdots$, soit $\tau_j(x)$ l'application linéaire de l'intervalle $[\pi/(j+1), \pi/j]$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ telle que $\tau_j(\pi/(j+1)) = -\pi$ et $\tau_j(\pi/j) = \pi$. Soit $\tau_0(x)$ l'application linéaire de l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ telle que $\tau_0(\pi) = -\pi$ et $\tau_0(2\pi) = \pi$. De plus, pour chaque valeur de $j \geq 1$, considérons les points de division $a_{ji} (i = 0, 1, 2, \cdots, j)$ tels que

$$a_{j0} = \pi/(j+1) < a_{j1} < a_{j2} < \cdots < a_{jj} = \pi/j$$

et on a $a_{j,i+1} - a_{ji} = \pi/j^2(j+1)$ pour tout $i = 0, 1, 2, \cdots, j-1$. Soient $\kappa_{ji}(x)$ les applications linéaires des intervalles $[a_{ji}, a_{j,i+1}]$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ telles que $\kappa_{ji}(a_{ji}) = -\pi$ et $\kappa_{ji}(a_{j,i+1}) = \pi$.

Alors, on a le

Lemme 1. *Si* $\varphi(x)$ *est une fonction bornée et convergeant vers zéro pour* $x = 0$. *La fonction suivante*:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^*_j(\tau_j(x))}{j+1} \varphi(\tau_j(x))\tau'_j(x) - \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{D^*_i(\kappa_{ji}(x))}{j(j+1)} \varphi(\kappa_{ji}(x))\kappa'_{ji}(x))$$

2) a désigne le plus grand nombre des entiers $\kappa \leq a$.

est intégrable $(E.\ R.\ \nu)$.

Démonstration Soit N un nombre positif tel que $|\varphi(x)| < N$. Posons $A_n = [-\infty, 0] \cup [\pi/(n+1), +\infty]$, $f_1(x) = \frac{1}{2} D_1^*(\tau_1(x))\varphi(\tau_1(x))\tau_1'(x)$ et $f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j^*(\tau_j(x))}{j+1} \varphi(\tau_j(x))\tau_j'(x) - \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{D_i^*(\kappa_{ji}(x))}{j(j+1)} \varphi(\kappa_{ji}(x))\kappa_{ji}'(x)$ pour tout $n = 2, 3, \cdots$. De la même considération que Théorème 1 précédent, on verra qu'il suffit de montrer qu'il existe une suite $\{\varepsilon_n^*\}$ monotone décroissante des nombres positives et convergeant vers 0, possédant la propriété suivante: on a $\int_B |f_n(x)|\,dx \leq \varepsilon_n^*$ pour tout ensemble mesurable B dont la mesure $\nu(B)$ est inférieur à $\nu(C\,A_n)$. Posons simplement $x_t^j = \tau_j^{-1}\left(\frac{t}{j}\pi\right)$ pour tout $t = 0, \pm 1, \cdots, \pm j$. En particulier, posons $x^j_{-[n^{1/3}]} = c_j$ et $x^j_{[n^{1/3}]} = d_j$ pour tout j tel que $n \geq j \geq [n^{1/2}]$. Alors, on voit que $\tau_j(x)$ est une application, dans l'intervalle $[c_j, d_j]$, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[-\pi[n^{1/3}]/j, \pi[n^{1/3}]/j]$, par suite dans l'intervalle $[-\pi[n^{1/3}]/[n^{1/2}], \pi[n^{1/3}]/[n^{1/2}]] \subseteq [-4\pi/n^{1/6}, 4\pi/n^{1/6}]$. De plus, on a mes $(B \cap [\pi/(n+1), 2\pi]) \leq l/(n+1)^2$ (l est une constant). Donc, on a d'abord que

$$\sum_{j=[n^{1/2}]}^{n} \int_{B\cap[c_j, d_j]} |j\, D_j^*(\tau_j(x))\varphi(\tau_j(x))|\,dx$$
$$\leq n^2 \max_x \{|\varphi(x)|;\ x \in [-4\pi/n^{1/6}, 4\pi/n^{1/6}]\} \cdot \text{mes}\,(B \cap [\pi/(n+1), \pi])$$
$$\leq l \max_x \{|\varphi(x)|;\ x \in [-4\pi/n^{1/6}, 4\pi/n^{1/6}]\}.$$

D'autre part, on a $|D_j^*(\tau_j(x))| \leq j/\pi[n^{1/3}]$ pour tout x appartenant à l'ensemble $(\pi/(j+1), c_j) \cup (d_j, \pi/j)$.
Donc, on a

$$\sum_{j=[n^{1/2}]}^{n} \int_{B\cap C[c_j, d_j]} |j\, D_j^*(\tau_j(x))\varphi(\tau_j(x))|\,dx$$
$$\leq N\, n^2/\pi[n^{1/3}] \ \text{mes}\,(B \cap [\pi/(n+1), \pi]) \leq l\, N/[n^{1/3}].$$

En outre, on a

$$\sum_{j=1}^{[n^{1/2}]-1} \int_B |j\, D_j^*(\tau_j(x))\varphi(\tau_j(x))|\,dx \leq n\, N \ \text{mes}\,(B \cap [\pi/(n+1), \pi]) < l\, N/n.$$

Conséquemment, il s'ensuit que

$$\int_B \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j^*(\tau_j(x))}{j+1} \varphi(\tau_j(x))\tau_j'(x)\right| d\mathrm{x}$$
$$= 2\int_B \sum_{j=1}^{n} |j\, D_j^*(\tau_j(x))\varphi(\tau_j(x))|\,dx$$
$$\leq 6\, l\, \max\{(\max_x |\varphi(x)|;\ x \in [-4\pi/n^{1/6},\ 4\pi/n^{1/6}]),\ N/[n^{1/3}]\}.$$

De même, on a

$$\int_B \left|\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{D_i^*(\kappa_{ji}(x))}{j(j+1)} \varphi(\kappa_{ji}(x))\kappa_{ji}'(x)\right| dx$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_B \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} | j\, D_i^* \kappa_{ji}(x))\varphi(\kappa_{ji}(x)) \,|\, dx \\
&\leq 2\Big\{ \sum_{j=[n^{1/2}]+1}^{n} \sum_{i=[n^{1/2}]}^{j-1} \int_B | j\, D_i^*(\kappa_{ji}(x))\varphi(\kappa_{ji}(x)) \,|\, dx \\
&\quad + \sum_{j=[n^{1/2}]+1}^{n} \sum_{i=1}^{[n^{1/2}]-1} \int_B | jD_i^*(\kappa_{ji}(x))\varphi(\kappa_{ji}(x)) \,|\, dx \\
&\quad + \sum_{j=2}^{[n^{1/2}]} \sum_{i=1}^{j-1} \int_B | j\, D_i^*(\kappa_{ji}(x))\varphi(\kappa_{ji}(x)) \,|\, dx \Big\} \\
&\leq 8l \max\{(\max_x |\, \varphi(x) \,|;\, x \in [-4\pi/n^{1/6}],\, 4\pi/n^{1/6}]),\, N/[n^{1/3}]\}.
\end{aligned}
$$

Donc, si l'on pose

$\varepsilon_n^* = 14l \max\{(\max_x \varphi(x) \,|;\, x \in [-4\pi/n^{1/6},\, 4\pi/n^{1/6}]),\, N/[n^{1/3}]\}$, on a $\int_B |\, f_n(x) \,|\, dx \leq \varepsilon_n^*$.

Lemme 2. *Si $\varphi(x)$ est une fonction bornée et continue au point $x=0$. La fonction suivante:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos(j\,\tau_j(x))}{j+1}\varphi(\tau_j(x))\tau_j'(x) - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{j-1} \frac{\cos(i\,\kappa_{ji}(x))}{j(j+1)}\varphi(\kappa_{ji}(x))\kappa_{ji}'(x)$$

est intégrable (*E. R. ν*).

Démonstration. De même que Lemme 1, posons $A_n = [-\infty, 0] \cup [\pi/(n+1), +\infty]$ pour tout $n = 0, 1, 2, \cdots$, $f_0(x) = \varphi(\tau_0(x))\tau_0'(x)$ et

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\cos(j\,\tau_j(x))}{j+1}\varphi(\tau_j(x))\tau_j'(x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} \frac{\cos(i\,\kappa_{ji}(x))}{j(j+1)}\varphi(\kappa_{ji}(x))\kappa_{ji}'(x)$$

pour tout $n = 1, 2, \cdots$. Alors, pour tout ensemble mesurable B tel que $\nu(B) \leq \nu(CA_n)$, on a

$$\int_B |\, f_n(x) \,|\, dx \leq 6nN \text{ mes } (B \cap [\pi/(n+1), 2\pi]) \leq 6lN/(n+1).$$

Des Lemme 1 et Lemme 2, il s'ensuit que

Théorème 2. *Soit $\varphi(x)$ une fonction bornée et convergeant vers zéro pour $x=0$. Posons*

$$
\begin{aligned}
f_n(x;\varphi) = \frac{1}{\pi}\Big\{ &\sum_{j=0}^{n} \frac{D_j(\tau_j(x))}{j+1}\varphi(\tau_j(x))\tau_j'(x) \\
&- \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} \frac{D_i(\kappa_{ji}(x))}{j(j+1)}\varphi(\kappa_{ji}(x))\,\kappa_{ji}'(x)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Alors, la fonction $f(x;\varphi) = \lim_{n\to\infty} f_n(x;\varphi)$ est intégrable (E. R. ν) *et on a*

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_n(x;\varphi)dx = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S_i,\quad S_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_i(x)\varphi(x)dx,$

(2) (E. R. ν) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x;\varphi)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f_n(x;\varphi) = \delta(\varphi).$

Corollaire 1. *Si $\varphi(x)$ est une fonction bornée et continue au point $x=0$. La fonction $f(x;\psi)$, $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$, est intégrable* (E. R. ν) *et on a*

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_n(x;\psi)dx + \varphi(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S_i,\quad S_i = \int_{-\pi}^{\pi} D_i(x)\varphi(x)dx,$

(2) (E. R. ν) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x;\psi)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f_n(x;\psi)dx = \delta(\varphi).$