84. *Sur l'intégrale* (A) *et l'intégrale* (E.R.). II

Par Hatsuo OKANO

Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., May 19, 1965)

Suite à la Note précédente,[1] nous allons étudier la relation entre l'intégrale (A) et l'intégrale $(E.\ R.\ \nu)$.

Si l'on prend pour ν la mesure de Lebesgue, l'intégrale $(E.\ R.\ \nu)$ coïncide avec l'intégrale (A).[2] Et il est évident que, s'il existe deux constantes $0<m<M<\infty$ telles que $m\nu(E)\leq\mu(E)\leq M\nu(E)$ pour tout E, l'intégrale $(E.R.\mu)$ est identique à l'intégrale $(E.R.\nu)$. Mais, l'intégrale $(E.R.\nu)$ d'une fonction qui n'est pas sommable dépend en général de la mesure ν.

Dans la présente Note, nous allons donner quelque condition supplémentaire dont l'intégrabilité (A) entraîne l'intégrabilité $(E.R.\nu)$ et deux intégrales sont égales.

Dorénavant, considérons toujours l'intégration dans l'intervalle $I=[-1,\ 1]$ et, pour ν, une mesure définie par

$$\nu(E)=\int_E g(x)\,dx,$$

où $g(x)$ est une fonction bornée et paire jouissant de la condition suivante:

$$\text{Si } 0<x<y, \text{ on a } g(x)<g(y)$$

Lemme 1. *Soit $f(x)$ une fonction telle qu'il existe une fonction $p(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, jouissant des conditions suivantes*:

1) $p(\varepsilon)\uparrow\infty$ *quand* $\varepsilon\to+0$.

2) $$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{p(\varepsilon)\int_0^\varepsilon g(x)\,dx}{g(\varepsilon)}=0.$$

3) $f(x)\leq Mp(|x|)$ (M *une constante*).

Alors, on a

$$(E.R.\nu)\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=(P)\int_{-1}^{1}f(x)\,dx^{3)}$$

au sens que, si l'une existe, alors l'autre aussi existe et les deux

1) H. Okano: Sur l'intégrale (A) et l'intégrale $(E.R.)$. Proc. Japan Acad., **41**, 17-22 (1965). Voir cette Note quant aux définitions conçernant les intégrales (A) et $(E.R.\nu)$.

2) I. Amemiya and T. Andô: Measure-theoretic singular integral (en japonais, avec un résumé anglais). Bull. Res. Inst. App. El., Hokkaido Univ., **13**, 33-50 (1961); On the class of functions integrable in a certain generalized sense. Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ., **17**, 127-140 (1964).

3) Nous désignons par $(P)\int f(x)\,dx$ la valeur principale de Cauchy.

sont égales.

Démonstration. Soit λ_n le nombre tel que $\int_0^{\lambda_n} g(x)\,dx = 2^{-n}$. Alors, $A_n = [-1, -\lambda_n] \cup [\lambda_n, 1]$ satisfait aux conditions suivantes:

(P_1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ et $\nu(I-A_n) \to 0$.

(P_2) Il existe une constante $k>1$ telle que $k\nu(I-A_{n+1}) \geq \nu(I-A_n)$ pour tout n.

(P_3) $f(x)$ est sommable sur chaque A_n.

(P_4) Il existe une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ telle qu'on ait $\int_E |f(x)|\,dx \leq \varepsilon_n$ pour tout $E \subseteq A_n$ tel que $\nu(E) \leq \nu(I-A_n)$.

D'autre part, puisque

$$\lambda_n - \lambda_{n+1} \leq \frac{\int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} g(x)\,dx}{g(\lambda_{n+1})} = \frac{\int_0^{\lambda_{n+1}} g(x)\,dx}{g(\lambda_{n+1})},$$

on a pour tout ε tel que $\lambda_{n+1} \leq \varepsilon \leq \lambda_n$

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_n} f(x)\,dx - \int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)\,dx\right| &\leq M_p(\lambda_{n+1})(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \\ &\leq M\frac{p(\lambda_{n+1})\int_0^{\lambda_{n+1}} g(x)\,dx}{g(\lambda_{n+1})} \\ &\to 0, \qquad\qquad \text{c.q.f.d.}\end{aligned}$$

Exemple 1. *Cas où* $g(x) = \frac{d}{dx}e^{-1/x}$ *pour* $x>0$. Puisque $\frac{\int_0^{\varepsilon} g(x)\,dx}{g(\varepsilon)} = \varepsilon^2$, en posant $p(\varepsilon) = \varepsilon^{-s}$, $0<s<2$, dans le Lemme 1, on a ($E.R.\nu$) $\int_{-1}^{1} |x|^{-s} \operatorname{sign} x\,dx = 0$ $(0<s<2)$.

À titre d'autre exemple d'une fonction intégrable ($E.R.\nu$), considérons la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-i}}{\left(x-\dfrac{1}{i+1}\right)\log\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{i+1}}} & \text{pour } x\left(\dfrac{1}{i+1} < x \leq \dfrac{1}{i},\ i=1,2,\cdots\right) \\ -f(-x) & \text{pour } x(-1 \leq x < 0). \end{cases}$$

Cette fonction a un nombre infini des points tels qu'elle n'y est pas sommable. Mais, si l'on pose

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{1}{i+1}+e^{-n}, \frac{1}{i}\right] \cup \left[-\frac{1}{i}, -\frac{1}{i+1}-e^{-n}\right]\right\},$$

alors A_n satisfait aux conditions (P_1)$-$(P_4). Et on a de plus $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)dx = 0$. Donc, $f(x)$ est intégrable ($E.R.\nu$) et son intégrale est égale à 0.

Exemple 2. *Cas où* $g(x)=\frac{d}{dx}e^{-e^{\frac{1}{x}}}$ *pour* $x>0$. Puisque $\frac{\int_0^\varepsilon g(x)\,dx}{g(\varepsilon)}$ $=\varepsilon^2 e^{-1/\varepsilon}$, en posant $p(\varepsilon)=\varepsilon^{-s}$, $s>0$, dans le Lemme 1, on a $(E.R.\nu)$ $\int_1^1 |x|^{-s}\operatorname{sign} x\,dx=0$ pour tout $s>0$.

Lemme 2. *Soit* $f(x)$ *une fonction telle qu'il existe une fonction* $q(t)$, $t>0$, *jouissant des conditions suivantes*:

1) $q(t)\uparrow\infty$ *quand* $t\to\infty$.
2) *Pour tout* $c>0$, *on a* $\lim_{t\to\infty} q(ct)\,\mathrm{Mes}(\{x;\,|f(x)|>t\})$[4] $=0$.
3) $f(x)\le Mq\left(q\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$ (*M une constante*).

Si $f(x)$ *est intégrable* (*Q*),[5] *alors elle est intégrable* (*P*) *et on a*

$$(Q)\int_{-1}^1 f(x)\,dx=(P)\int_{-1}^1 f(x)\,dx.$$

Si en outre $q(t)$ *est continue, l'inverse est aussi valable.*

Démonstration. D'abord on a l'inégalité suivante.

$$\left|\int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)dx-\int_{-1}^1 [f(x)]_{q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}dx\right|$$
$$\le\int_{\substack{|x|\ge\varepsilon\\ |f(x)|>q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}} |f(x)|\,dx+\int_{|x|<\varepsilon}|[f(x)]_{q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}|\,dx=I_\varepsilon+J_\varepsilon.$$

Premièrement, 3) entraîne

$$I_\varepsilon\le M\,q\left(q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{Mes}\left(\left\{x;\,|f(x)|>q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}\right).$$

Donc, d'après 2) on a $\lim_{\varepsilon\to+0} I_\varepsilon=0$.

Deuxièmement, supposons par impossible qu'il existe une suite $\varepsilon(n)\downarrow 0$ et un nombre $\delta>0$ tels que $J_{\varepsilon(n)}>\delta$ pour tout n. Alors, on a l'inégalité

$$\delta<J_{\varepsilon(n)}=\int_{\substack{|x|<\varepsilon(n)\\ |f(x)|>\frac{\delta}{4\varepsilon(n)}}}+\int_{\substack{|x|<\varepsilon(n)\\ |f(x)|\le\frac{\delta}{4\varepsilon(n)}}}$$
$$\le q\left(\frac{1}{\varepsilon(n)}\right)\mathrm{Mes}\left(\left\{x;\,|f(x)|>\frac{\delta}{4\varepsilon(n)}\right\}\right)+\frac{\delta}{2};$$

donc,

$$q\left(\frac{1}{\varepsilon(n)}\right)\mathrm{Mes}\left(\left\{x;\,|f(x)|>\frac{\delta}{4\varepsilon(n)}\right\}\right)>\frac{\delta}{2}.$$

C'est en contradiction avec 2). Ainsi on a $\lim_{\varepsilon\to+0} J_\varepsilon=0$, c.q.f.d.

---

4) Mes(*E*) désigne la mesure lebesguienne d'ensemble *E*.

5) Nous posons avec M.E.C. Titchmarsh

$$(Q)\int f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int [f(x)]_n\,dx,\ \text{où}\ [f(x)]_n=\begin{cases} n & \text{si } f(x)>n\\ f(x) & \text{si } |f(x)|\le n\\ -n & \text{si } f(x)<-n.\end{cases}$$

Voir E.C. Titchmarsh: On conjugate functions. Proc. London Math. Soc., **29**, 49-80 (1929).

Dans un ensemble $\{x;\ \varepsilon \leq |x| \leq 1\}, \varepsilon > 0$, puisqu'on a $g(\varepsilon)$ Mes$(E) \leq \nu(E) \leq g(1)$ Mes(E) pour tout E, l'intégrale (A) est identique à l'intégrale $(E.R.\nu)$. Donc, en posant $p(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, $q(t) = t$ et $p(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon}$, $q(t) = t\,(\log t)^{1/2}$ respectivement, d'après les Lemmes 1 et 2, on a les Théorèmes 1 et 2 suivantes.

Théorème 1. *Soit ν une mesure définie par $g(x)$ telle que*

$$\frac{\int_0^\varepsilon g(x)\,dx}{g(\varepsilon)} = o(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \to +0.$$

Si $f(x)$ est une fonction intégrable (A) telle que $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \to 0$, alors $f(x)$ est intégrable $(E.R.\nu)$ et on a

$$(A) \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = (E.R.\nu) \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Théorème 2. *Soit ν une mesure définie par $g(x)$ telle que*

$$\frac{\int_0^\varepsilon g(x)\,dx}{g(\varepsilon)} = o\left(\frac{\varepsilon}{\log 1/\varepsilon}\right) \text{ quand } \varepsilon \to +0.$$

Si une fonction $f(x)$ satisfait aux conditions saivantes:

1) $f(x) = o\left(\frac{1}{x} \log \frac{1}{|x|}\right)$ *quand* $x \to 0$,

2) Mes $(\{x;\ |f(x)| > t\}) = o\left(\frac{1}{t(\log t)^{1/2}}\right)$,

alors, pour que $f(x)$ soit intégrable (A), il faut et il suffit qu'elle soit intégrable $(E.R.\nu)$. Et, dans ce cas on a

$$(A) \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = (E.R.\nu) \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Contre-exemple. Il existe une fonction intégrable (A) telle que $o\left(\frac{1}{x} \log \frac{1}{|x|}\right)$ cependant elle n'est pas intégrable (P) et donc, du Lemme 1, elle n'est pas intégrable $(E.R.\nu)$ pour toute ν jouissant de la condition du Théorème 2.

À titre d'exemple, considérons la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{pour } x\left(\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} + \frac{a(n)}{n^2}\right) \\ -n \log n & \text{pour } x\left(-\frac{1}{n} - \frac{b(n)}{n^2 \log n} < x < -\frac{1}{n}\right) \quad (n = 3, 4, \cdots) \\ 0 & \text{en dehors} \end{cases}$$

où

$$a(n) = \min\{1, |\log \log m|^{-1}\} \text{ pour } n(me^m < n < (m+1)e^{m+1}),$$

$$b(n) = \min\left\{1, \frac{m+1}{m} |\log \log m|^{-1}\right\} \text{ pour } n(e^m < n < e^{m+1}),$$

$$m = 1, 2, 3, \cdots$$

Si l'on pose $n(N)=\min\{n;\ n\log n>N\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Mes}(\{x;\ |f(x)|>N\}) &= \sum_{N+1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^2}+\sum_{n(N)}^{\infty}\frac{b(n)}{n^2\log n}\\ &\le a(N+1)\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+b(n(N))\sum_{n(N)}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}\\ &\le \frac{a(N+1)}{N}+\frac{2b(n(N))}{n(N)\log n(N)}\\ &= o\left(\frac{1}{N}\right).\end{aligned}$$

Ensuite, puisqu'on a

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]_{(m+1)e^{m+1}}dx-\int_{-1}^{1}[f(x)]_{me^m}dx =\left(\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{\log\log m}+c_m,$$

où $|c_m|\le 4e^{-m}$, et, si $me^m<N<M<(m+1)e^{m+1}$,

$$\left|\int_{-1}^{1}[f(x)]_M dx-\int_{-1}^{1}[f(x)]_N dx\right|\le\frac{4}{\log\log m}$$

donc $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}[f(x)]_N dx$ existe.

Ainsi, $f(x)$ est intégrable (A).

Mais, si N est la partie entière de me^m, on a

$$\int_{\frac{1}{N}\le|x|\le 1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}[f(x)]_N dx-S_N,$$

où

$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{e^m<n<me^m}\frac{b(n)}{n}\ge\sum_{e^m<n<me^m}\frac{1}{n\log\log\log n}\\ &\ge\frac{m}{\log\log m}\sum_{e^m<n<me^m}\frac{1}{n\log n}\ge\frac{\log m}{4\log\log m}.\end{aligned}$$

D'où on a $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}\le|x|\le 1}f(x)dx=-\infty$. Donc, $f(x)$ n'est pas intégrable (P).