170. *Sur la régularité des points frontières relative à l'équation linéaire du type elliptique et du second ordre dans le problème de Dirichlet.* II

Par Seturo SIMODA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1965)

§ 3. Cas $c(x)$ non-positif. Régularité au sens Lebesgue-Bouligand. Maintenant, nous allons donner une autre définition de la régularité.

DÉFINITION 3.1. (*Régularité au sens Lebesgue-Bouligand*). On dit qu'*un* point $\Xi \in \partial d$ est *régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d *au sens de Lebesgue-Bouligand* (ou au sens [LB] abréviativement), lorsque et seulement lorsqu'il existe une hypersphère ouverte Σ centrée sur Ξ et une fonction $V \in \boldsymbol{C}(d \cap \Sigma)$ remplissant les conditions suivantes:

[1] $V(x)>0$ dans $d \cap \Sigma$ entier,

[2] $\lim\limits_{\substack{x \to \Xi \\ (x \in d \cap \Sigma)}} V(x)=0$ et

[3] V est (10)-surfonction dans $d \cap \Sigma$.

A propos de telle régularité, le théorème qui suit est aisé à prouver:

THÉORÈME 5. *Si un point* $\Xi \in \partial d$ *est régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d, Ξ *est en même temps régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d *au sens* [LB].

Preuve. Si $\Xi \in \partial d$ est régulier ($\mathfrak{L}u=0$) pour d, il existe une hypersphère ouverte Σ et une $\Psi \in \boldsymbol{C}^2(d \cap \Sigma)$, qui d'elle-même satisfait à [1], [2], et [3], c.q.f.d.

Si l'inverse de ce théorème était établie, il résulterait une équivalence entre la régularité au sens [LB] et celles des autres sortes. Quoique l'établissement de l'inverse de Théorème 5 est ainsi favorable à nous et il y a toute apparence qu'elle sera affirmative, nous n'avons pas réussi à la démontrer. Mais, si nous préferons, plutôt que la régularité au sens [LB], la régularité au sens [LB′], qu'on va définir tout de suite, la dite équivalence est aisée à obtenir.

DÉFINITION 3.2. (*Régularité au sens* [LB′]). On dit qu'*un* point $\Xi \in \partial d$ est *régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d *au sens* [LB′], lorsque et seulement lorsqu il existe une hypersphère ouverte Σ centrée sur Ξ et une fonction $V \in \boldsymbol{C}(\Sigma \cap d)$ remplissant les conditions [2], [3] en haut et celle qui suit:

[1′] $\liminf\limits_{\substack{x \to s \\ (x \in \Sigma \cap d)}} V(x)>0$

quel que soit $s \in \partial(\Sigma \cap d)$ *excepté* $s=\Xi$.

THÉORÈME 6. *Si un point* $\Xi \in \partial d$ *est régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d *au sens* [LB′], *il est en même temps régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d; *et* *vice versa*.

Preuve. Premier supposons que $\Xi \in \partial d$ soit régulier ($\mathfrak{L}u=0$) pour d au sens [LB′]. Si l'on réfléchit sur la preuve de Théorème 4, il est aisé de voir qu'il n'y a qu'à démontrer qu'on a

$$\lim_{\substack{x\to\Xi\\(x\in d)}} u[\chi, 0](x)=\chi(\Xi)$$

quelle que soit $\chi \in \boldsymbol{C}(\partial d)$, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon>0$, il vient

$$(11)\qquad \begin{cases} \limsup\limits_{\substack{x\to\Xi\\(x\in d)}} u[\chi, 0](x)<\chi(\Xi)+\varepsilon \quad \text{et} \\ \liminf\limits_{\substack{x\to\Xi\\(x\in d)}} u[\chi, 0](x)>\chi(\Xi)-\varepsilon. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse du théorème, il existe une Σ et une fonction $V\in \boldsymbol{C}(d\cap\Sigma)$ remplissant les conditions [1′], [2], et [3] (cf. Définition 3.2).

Soit $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ un nombre tel que $|s-\Xi|\leqq\delta$ et $s\in\partial d$ entraînent

$$(12)\qquad |\chi(s)-\chi(\Xi)|\leqq\varepsilon.$$

Désignons par Σ_1 une hypersphère ouverte centrée sur Ξ, de rayon $\leqq\delta$ et telle qu'on ait

$$(13)\qquad \overline{\Sigma}_1\subset\mathfrak{G}\cap\Sigma \quad \text{et} \quad (\partial\Sigma_1)\cap d\neq\text{vide}.$$

Puisque $s\in\partial(\Sigma_1\cap d)$ entraîne $s\in\overline{\Sigma\cap d}$, V satisfait aux [1′], [2], et [3] avec Σ_1 au lieu de Σ. Encore

$$m=\min\,[V_*(x): x\in\overline{(\partial\Sigma_1)\cap d}]^{1)}$$

est sans aucun doute >0 vu que $\overline{(\partial\Sigma_1)\cap d}\subseteq\overline{\Sigma\cap d}$.

Prenons une $\hat{W}\in \boldsymbol{C}^2(\bar{d})\cap\overline{\mathfrak{F}}(\chi, 0)$ et posons

$$C=\max\,[\hat{W}(x)-\chi(\Xi): x\in\bar{d}]=\max\,[\hat{W}(x): x\in\bar{d}]-\chi(\Xi);$$

le fait que $\hat{W}$ satisfait à $[\bar{P}]$ pour χ entraîne $C\geqq 0$. Si l'on pose

$$V_1(x)=C\,V(x)/m+\chi(\Xi)+\varepsilon,$$

c'est une (10)-surfonction dans $d\cap\Sigma_1$ et donne

$$(14)\qquad \liminf_{\substack{x\to y\\(x\in\Sigma_1\cap d)}} V_1(x)>\hat{W}(y) \quad \text{toutes les fois } y\in(\partial\Sigma_1)\cap d$$

d'après le choix de C et m. Puisqu'il subsiste (14) et que $\hat{W}$ est une (10)-surfonction dans d *entier*, la fonction

$$W(x)=\begin{cases}\hat{W}(x) & \text{lorsque } x\in d-\Sigma_1 \\ \min\,[V_1(x),\ \hat{W}(x)] & \text{lorsque } x\in d\cap\Sigma_1\end{cases}$$

est encore (10)-surfonction dans d *entier* en vertu de Lemme 2.3. En outre, il est aisé de voir que W satisfait à la condition $[\bar{P}]$, c'est-à-dire $W\in\overline{\mathfrak{F}}(\chi, 0)$, vu (12).

Du précédent, il résulte

$$u[\chi, 0](x)\leqq W(x) \qquad \text{dans } d \text{ entier}$$

et donc

1) On entend

$$V_*(x)=\liminf_{\substack{y\to x\\(y\in d\cap\Sigma_1)}} V(y)$$

pour $x\in\overline{(\partial\Sigma_1)\cap d}$.

$$\limsup_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d)}} u[\chi, 0](x) \leqq \limsup_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d)}} W(x) \leqq \lim_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d\cap\Sigma_1)}} V_1(x)$$
$$<\chi(\Xi)+\varepsilon;$$

c'est la première inégalité de (11).

Tout de la même façon, on obtient la deuxième.

Ensuite, on suppose Ξ étant régulier ($\mathfrak{L}u=0$) pour d. Alors, il existe une hypersphère ouverte Σ centrée sur Ξ (et de rayon $\delta>0$) et une fonction $\Psi\in \boldsymbol{C}^2(d\cap\Sigma)$ remplissant les conditions ⟪1⟫, ⟪2⟫, et ⟪3⟫ (cf. Définition 1.1).

Si l'on pose

$$V(x)=M\Psi(x)+|x-\Xi|^2$$

dans $d\cap\Sigma$ avec

$$M=2\left(\frac{n}{\underline{\alpha}_0^2}+B\delta\right)+|c|\delta^2,$$

V est une (10)-surfonction dans $d\cap\Sigma$ (la condition [3]) et aisément on voit V satisfaisant aux conditions [1′] et [2] en tenant compte de ⟪1⟫, c.q.f.d.