32. *Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. IV*

Par Ikuo KIMURA
Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1966)

Introduction. Nous avons considéré jusqu'au présent les quatre sortes de pseudoconvexité par rapport à une direction complexe [1]$\sim$[3], et montré deux équivalences entre eux. L'équivalence dernière qui reste sans d'être prouvée, est démontrée dans cette présente Note, de sorte que toutes les sortes de pseudoconvexité, introduites dans [1]$\sim$[3], sont mutuellement équivalentes.

La pseudoconvexité (III). Soit D un domaine univalent dans l'espace de deux variables w, z. Comme on l'a vu dans l'Introduction, pour démontrer l'équivalence mutuelle des quatre définitions, il suffit d'établir le lemme suivant.

Lemme. *Le domaine D est pseudoconvexe par rapport* à w, *si et seulement si D est pseudoconvexe* (III) *par rapport* à w.

Preuve. Nous employons les définitions et les notations introduites dans les lemmes 1, 2, 3 de [3], sans aucune explication nouvelle. En vertu du théorème de [3], il suffit de prouver qu'un domaine est pseudoconvexe (II) par rapport à w, s'il est pseudoconvexe (III) par rapport à w. Pour raisonner par l'absurde, supposons que cela ne soit pas vrai. Alors d'après le lemme 1, [3], il existe un domaine D, des domaines cylindriques C, C_1, C_2, et une fonction $p(z)$ satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° du même lemme ($p(z)\not\equiv cte.$).

(1) Considérons l'ensemble $A_2=\{(|z|, |w|)\,|\,(w, z)\in A\}$. Soit $y=k(x)$ l'équation représentant la frontière inférieure du plus petit ensemble convexe contenant A_2. Si l'on emploie la fonction $\varphi(z)=z$ pour $\varphi(z)$ dans le lemme 2, [3], on voit que $k(x)$ est défini et strictement croissant dans un intervalle fermé $[|b|, |c|]$, où $|b|=\max.\{|z|\,|\,(w, z)\in A, |w|=|a|\}$, $|a|$ désignant $\min.\{|w|\,|\,(w, z)\in A\}$, et où $|c|$ est assez voisin de $|b|$. Il existe un nombre positif s assez petit, tel que $k(x)-sx$ atteigne son minimum à un seul point $x=x_0$ ($|b|\leqq x_0<|c|$). En effet, sinon, il existe des segments l_1 et l_2, appartenant à la courbe $y=k(x)$ tous les deux et aussi voisins du point $(|b|, k(|b|))$ que l'on veut, et d'ailleurs on peut les choisir de manière que leurs gradients a_1 et a_2 soient assez petits. Sur la courbe $y=k(x)$, il y a un point p entre l_1 et l_2, et n'étant contenu dans aucun segment appartenant à cette courbe. (En effet, sinon,

il y aurait un segment l_3 entre l_1 et l_2 et appartenant à la courbe. Il y aurait un segment l_4 entre l_2 et l_3 et appartenant à la courbe; et ainsi de suite. Soit p_0 la limite de la suite $l_1, l_3, \cdots$; le point p_0 n'est contenu dans aucun segment appartenant à la courbe.) Si $k(x)$ est dérivable au point $x=p_1$, où $p=(p_1, p_2)$, on a $a_1<k'(p_1)<a_2$. Dans ce cas, en posant $s=k'(p_1)$, on conduit une contradiction. Soit $k'_-(p_1)<k'_+(p_1)$; prenons un s_0 entre ces valeurs. On a $a_1\leqq k'_-(p_1)<s_0<k'_+(p_1)\leqq a_2$. Dans ce cas, il suffit de poser $s=s_0$ pour d'obtenir une contradiction.

Puisque l'on a $(x_0, k(x_0))\in A_2$, il y a un point (w_0, z_0) de A tel que $x_0=|z_0|$, $k(x_0)=|w_0|$. Considérons la transformation $W=w-se^{i\alpha}z$, où α est un nombre fixe tel que $e^{i\alpha}z_0/w_0$ soit réel et positif. On vérifie $|W_0|=k(|z_0|)-s|z_0|$, $W_0=w_0-se^{i\alpha}z_0$. D'autre part, l'image de A est contenue dans $|W|\geqq k(|z|)-s|z|$. Et la fonction $k(|z|)-s|z|$ atteint son minimum $|W_0|$ aux points et seulement aux points $|z|=|z_0|$. On peut vérifier que, par rapport aux variables W, z et par rapport à la fonction $p(z)+se^{i\alpha}z$, l'image de D jouit des propriétés 1°, 2°, 3° du lemme 1, [3], si l'on fait des changements assez petits de C, C_1, C_2. Donc on peut supposer, sans perdre la généralité, que l'on a $|w|>|a|$ pour $(w, z)\in A$ et $|z|\neq|b|$.

(2) Les points z tels que $\{(w, z)\in A \mid |w|=|a|\}\neq\emptyset$, se placent sur $|z|=|b|$ et ils sont en nombre fini, d'après le lemme 3, [3]. Désignons par $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k (\zeta_1=b)$ tous les points z satisfaisant à cette condition. Transformons le cercle $|z|\leqq\rho$ au cercle $|Z|\leqq\rho$ par

$$Z=\frac{\rho^2(z-b)}{\rho^2-\bar{b}z}.$$

Désignons par D' la composante connexe, contenant l'origine, de l'image de l'intersection de D et un voisinage du cercle $|z|\leqq\rho$, et posons $q(Z)=p(\rho^2(Z+b)/(\rho^2+\bar{b}Z))$. Soient $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ les images de $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k (\xi_1=0)$. On voit que $|w|>|a|$ pour $(w, Z)\in A'$ (l'image de A), si $|Z|\neq|\xi_j|$, $j=1, 2, \cdots, k$. Pour simplifier l'exposition, nous employons les lettres D, z, $p(z)$ au lieu de D', Z, $q(Z)$: cela ne conduit aucune ambiguïté. En prenant ρ assez petit et des domaines C, C_1, C_2 convenables, on voit que le domaine D jouit des propriétés 1°, 2°, 3° et en plus de la suivante:

4°. On a $(a, 0)\in A$ et $|w|\geqq|a|$ pour $(w, z)\in A$, dont l'égalité a lieu si et seulement si $z=0$.

On peut simplifier la fonction $p(z)$. Pour ρ assez petit, on a $p(z)=-(zg(z))^m$, où m est un nombre entier, plus grand que 1 et $g(z)$ une fonction holomorphe et non nulle dans un voisinage de $|z|\leqq\rho$. Considérons la transformation $Z=zg(z)$. Sur le plan Z, on peut prendre un cercle assez petit $|Z|\leqq\rho_1$ contenu dans l'image de C.

Donc l'image de la composante connexe, contenant l'origine, de l'intersection de D et un voisinage de $|z|\leqq\rho$, jouit des propriétés 1°, 2°, 3°, 4°. Par conséquent, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $p(z)=-z^m$.

(3) Employons la fonction $\varphi(z)=z$ pour $\varphi(z)$ du lemme 2, [3]. Et considérons le cas où l'on a $[H^{-\frac{1}{2}}(x)]'\not\equiv(x^{\frac{m}{2}})'$ dans un voisinage quelconque U de $x=0$. Il existe au moins un point $(x_0, y_0)(y_0=H(x_0))$ de $A_1\cap U$ tel que $G'(x_0)\neq\frac{m}{2}x_0^{\frac{m}{2}-1}$, où $G(x)=H^{-\frac{1}{2}}(x)$. En effet, soit (x_1, y_1) $(y_1=H(x_1))$ un point de U tel que $G'(x_1)\neq\frac{m}{2}x_1^{\frac{m}{2}-1}$. Si $(x_1, y_1)\in A_1$, il suffit de poser $x_0=x_1$. Si $(x_1, y_1)\notin A_1$, alors (x_1, y_1) est situé sur un segment l de la courbe $y=H(x)$. Désignons par (x_2, y_2), (x_3, y_3), et $-\lambda$, la limite gauche, la limite droite et le gradient de l, respectivement. Si $G'(x_1)>\frac{m}{2}x_1^{\frac{m}{2}-1}$, on a $\lambda>mx_1^{\frac{m}{2}-1}H^{\frac{3}{2}}(x_1)$. Si $m>2$, comme on a

$$[x^{\frac{m}{2}-1}H^{\frac{3}{2}}(x)]'=\frac{1}{2}x^{\frac{m}{2}-2}H^{\frac{1}{2}}(x)\{(m-2)H(x)+3xH'(x)\}>0$$

pour x assez petit, on a $\lambda>mx_2^{\frac{m}{2}-1}H^{\frac{3}{2}}(x_2)$, c'est-à-dire que $G'(x_2)>\frac{m}{2}x_2^{\frac{m}{2}-1}$. Si $m=2$, on a $\lambda>2H^{\frac{3}{2}}(x_3)$, c'est-à-dire que $G'(x_3)>\frac{m}{2}x_3^{\frac{m}{2}-1}$. Donc dans le cas $G'(x_1)>\frac{m}{2}x_1^{\frac{m}{2}-1}$, il suffit de poser $x_0=x_2$ ou x_3. Ensuite dans le cas $G'(x_1)<\frac{m}{2}x_1^{\frac{m}{2}-1}$, il suffit aussi de poser $x_0=x_2$ ou x_3.

Soit (w_0, z_0) un point de A tel que l'on ait $x_0=|z_0|^2$, $y_0=|1/w_0|^2$, et soit $\{E_t\}_{t\geqq1}$ la famille des surfaces analytiques définies par

$$E_t: 1/(\overline{w}_0w)+\lambda\overline{z}_0z=\Phi_0t,\ t\geqq1,$$

où $\lambda=-H'(x_0)$ et $\Phi_0=y_0+\lambda x_0$. Si l'on désigne par $w=f(z, t)$ l'équation de E_t, on a $f'(z_0, 1)=\lambda\overline{w}_0w_0^2\overline{z}_0$ et $|f'(z_0, 1)|=2G'(x_0)x_0^{\frac{1}{2}}\neq mx_0^{\frac{m-1}{2}}$. Par conséquent, on a $f'(z_0, 1)+p'(z_0)\neq0$. L'existence d'une telle famille est en contradiction avec la condition 3°. Il faut donc que l'on ait $y=H(x)=(x^{\frac{m}{2}}+|a|)^{-2}$ dans un voisinage de $x=0$. En conséquence,

5°. On a $|w|\geqq|z|^m+|a|$ pour $(w, z)\in A$. Et pour η (>0) assez petit, il existe au moins un point (w, z) de A tel que $\eta=|z|$ et $|w|=|z|^m+|a|$.

De plus, on a les propositions suivantes 6°, 7°, 8°.

6°. On a $w=|w|(z/|z|)^m$ pour (w, z) de A tel que z soit non nul mais assez petit et que $|w|=|z|^m+|a|$.

En effet, dans la démonstration du 5°, on a $f'(z_0, 1)=\lambda\overline{w}_0w_0^2\overline{z}_0\neq mz_0^{m-1}$, si arg. $w_0\not\equiv m$ arg. z_0 (mod. 2π).

7°. Pour $\eta(>0)$ assez petit, il existe au moins un point (w, z) de A tel que $\eta=|z|$ et $w=(|z|^m+|a|)a/|a|$.

En effet, transformons D par $W=w-p$, où p est un nombre suffisamment petit tel que a/p soit réel et positif. L'image D' satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° par rapport au même polynôme $p(z)=-z^m$ que pour D. D'ailleurs on a $|a|-|p|=\min.\{|W|\,|\,(W,z)\in A'(\text{l'image de } A)\}$. Soit η un nombre positif suffisamment petit; il existe, d'après 5°, un point (W,z) de A' tel que $\eta=|z|$, $|W|=|z|^m+|a|-|p|$. D'après 6°, on a $W=(|z|^m+|a|-|p|)(z/|z|)^m$. Soit $w=W+p$; on a $(w,z)\in A$ et $|w|\leqq|z|^m+|a|$; d'après 5°, il faut que $|w|=|z|^m+|a|$, c'est-à-dire que $w=(|z|^m+|a|)(z/|z|)^m$. Par conséquent, on a

$$(|z|^m+|a|-|p|)(z/|z|)^m+p=(|z|^m+|a|)(z/|z|)^m.$$

Donc on a $(z/|z|)^m=p/|p|=a/|a|$.

8°. Tout point $(w,0)$ sur $|w|=|a|$ appartient à A.

Sa preuve est comme suit.

(4) Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il y ait un point $(a_0,0)$ de D tel que $|a_0|=|a|$. Soit $D(v)$ l'image de D par la transformation $W=uw$, $Z=vz$, où u,v sont deux nombres fixes satisfaisant à $u=v^m$. $D(v)$ jouit des propriétés 1°$\sim$7°, par rapport au polynôme $p(z)=-z^m$. On a $(|a|,0)\in D(\sqrt[m]{|a|/a_0})$; donc on peut considérer, sans perdre la généralité, a_0 comme réel et positif. Ensuite, soit D_0 la composante connexe, contenant l'origine, de la partie commune de $D, D(e^{i\frac{2\pi}{m}}), \cdots, D(e^{i\frac{2(m-1)\pi}{m}})$; alors D_0 jouit des propriétés 1°$\sim$7° et contient le point $(a_0,0)$. Pour simplifier la notation, dans la suivante nous écrivons D au lieu de D_0. D possède la propriété suivante.

9°. Pour $\eta(>0)$ assez petit, tous les m points (w_k,z_k), $k=0,1,\cdots,m-1$, sont situés sur A, où $w_k=(\eta^m+a)a/|a|$, $z_k=\eta\sqrt[m]{a/|a|}\,e^{i\frac{2k\pi}{m}}$.

Soit $\widehat{a_1,a_2}$ l'arc sur le cercle $|w|=a_0$ tel que $a_0\in\widehat{a_1,a_2}$ et $(\widehat{a_1,a_2},0)\cap A=\{(a_1,0),(a_2,0)\}$. Supposons que $\mathcal{R}a_1\geqq\mathcal{R}a_2$ et posons $a_1=a_0e^{i\mu_0}$, $0<|\mu_0|\leqq\pi$.

Maintenant employons la fonction $\varphi(z)=e^z$ pour $\varphi(z)$ du lemme 2, [3]. Désignons par $K(x)$ la fonction $H(x)$ du même lemme, correspondant à $\varphi(z)=e^z$. $K(x)$ est défini, concave, strictement décroissant et continûment dérivable dans un intervalle $[1,\eta_0]$ $(\eta_0>1)$. Soit B l'ensemble $\{(w,z)\in A\,|\,|1/w|^2=K(|e^z|^2),\ \mathcal{R}z>0\}$, qui est non vide d'après le lemme 2, [3]. Soit (ω,ζ) un point de B et soient $\mu=\mu(\omega)$, $\nu=\nu(\zeta)\left(|\nu(\zeta)|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ les arguments de ω,ζ, respectivement. Considérons la famille des surfaces analytiques

$$E_t: 1/(\bar{\omega}w)+\lambda e^{z+\bar{\zeta}}=\Phi_0 t,\ t\geqq 1,$$

où $\lambda=-K'(|e^\zeta|^2)$ et $\Phi_0=|1/\omega|^2+\lambda|e^\zeta|^2$. Soit $w=f(z,t)$ l'équation de E_t; on a $f'(\zeta,1)=\lambda\bar{\omega}\omega^2e^{\zeta+\bar{\zeta}}$. Il faut que

$$\mu\equiv(m-1)\nu \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

En effet, sinon, on a $f'(\zeta,1)\neq m\zeta^{m-1}$, et donc l'existence d'une telle famille $\{E_t\}_{t\geqq 1}$ conduit une contradiction avec 3°. Remarquons que, si $(w, \zeta)\in B$, on a $|\nu(\zeta)|\leqq|\mu_0|/m$, puisque le point $(|e^{\zeta}|^2, |1/\omega|^2)$ est situé au-dessus de la courbe

$$y=\left[\left(\frac{\log x}{2\cos\dfrac{\mu_0}{m}}\right)^m+a_0\right]^{-2}$$

et au-dessous de la courbe

$$y=\left[\left(\frac{\log x}{2\cos\nu}\right)^m+a_0\right]^{-2},$$

d'après 5°, 9°. (Pour le voir, il suffit, dans 9°, de prendre a_1 au lieu de a.)

D'autre part, on a $B_n\equiv\left\{(\omega,\zeta)\in B\,|\,\mathscr{R}\zeta\leqq\dfrac{1}{n}\right\}\neq\varnothing$ pour tout n positif, puisque l'on a

$$K(x)\geqq\left[\left(\frac{\log x}{2\cos\dfrac{\mu_0}{m}}\right)^m+a_0\right]^{-2}$$

pour x assez petit. Donc la borne inférieure ν_n de $\{|\nu(\zeta)|\,|\,(\omega,\zeta)\in B_n\}$ est bien définie. Soit ν_0 la limite de ν_n pour $n\longrightarrow\infty$. On a $\nu_0\leqq|\mu_0|/m$, et il existe une suite convergente (ω_n, ζ_n), $n=1, 2, \cdots$, de points de B telle que $\mathscr{R}\zeta_n\downarrow 0$, $|\nu(\zeta_n)|\longrightarrow\nu_0$. Soit ω_0 la limite de ω_n; on a $|\omega_0|=|a|$, puisque l'on a $K(1)=|1/a|^2$ et que $K(x)$ est continu. Donc, d'après 4°, on a $\lim\zeta_n=0$, c'est-à-dire que l'on a $(\omega_0, 0)\in A$. En outre, on a

$$|\arg.\,\omega_0|\equiv(m-1)\nu_0\leqq|\mu_0|\frac{m-1}{m}<|\mu_0|.$$

C'est absurde, puisque $\omega_0=|a|e^{\pm i(m-1)\nu_0}$ est situé à l'intérieur de $\widehat{a_1, a_2}$.

(5) Transformons D par $W=w-p$, où p est un nombre positif assez petit. L'image D' jouit des propriétés 1°$\sim$7° par rapport au polynôme $p(z)=-z^m$. Mais il n'existe pas de points de A' (l'image de A) sur $|W|=a_0-p$, excepté le point $(a_0-p, 0)$; c'est en contradiction avec la proposition 8°. C.Q.F.D.

Le lemme étant établi, nous avons le

Théorème. *Les quatre sortes de pseudoconvexité* (O), (I), (II), (III) *par rapport à une direction complexe coïncident.*

Références

[1] I. Kimura: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. Proc. Japan Acad., **41** (7), 535–540 (1965).
[2] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. II. Proc. Japan Acad., **41** (9), 791–794 (1965).
[3] ——: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. III. Proc. Japan Acad., **42** (2), 125–130 (1966).