109. *Sur le produit des espaces rangés. I*

Par Yukio YOSHIDA
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., May 12, 1966)

Considérons une famille $\{R_\xi \mid \xi \in \Xi\}$ non-vide d'espaces rangés[1] dont les indicateurs sont tout égales à un nombre ordinal ω, et qui satisfont aux axioms (A) et (B) de M. Hausdorff, et à l'axiom (b) de Prof. K. Kunugi.[1]

Dans l'ensemble produit $R=\prod_{\xi \in \Xi} R_\xi$ nous disons qu'une partie E de R est normale lorsqu'elle est l'ensemble produit des parties E_ξ de $R_\xi(\xi \in \Xi)$.

§ 1. Espace $\langle R, \rho_1\rangle$. Sur l'ensemble produit R, prenons pour la base de la topologie la totalité des ensembles produits

$$E=\prod_{\xi \in \Xi} E_\xi$$

tels qu'il existe un sous ensemble Ξ_1 de Ξ (dépendant de E) dont la puissance est inférieur à celle du nombre ω, et que

$$E_\xi=\begin{cases}\text{un voisinage d'un point de } R_\xi & \text{lorsque } \xi \in \Xi_1 \\ R_\xi & \quad\;\;〃 \quad\;\; \xi \notin \Xi_1.\end{cases}$$

Alors l'espace R devient un espace topologique satisfaisant aux axioms (A) et (B).

Sur l'espace R, prenons pour voisinages de rang α $(0 \leq \alpha < \omega)$ d'un point x quelconque de R tous voisinages normals de x dont chaqu'un est transformé par la projection $p_\xi : R \to R_\xi$ ou, pour au moins un indice ξ, sur un voisinage de rang α du point $p_\xi(x)$ dans R_ξ, ou sur R_ξ.

Si tous espaces rangés R_ξ satisfont aussi à l'axiom (c),[2] alors, R devient un espace rangé dont l'indicateur est ω, et qui satisfait aux axioms (b) et (c). Nous le désignons par $\langle R=\prod R_\xi, \rho_1\rangle$ ou brièvement par $\langle R, \rho_1\rangle$.

Dans l'espace rangé $\langle R, \rho_1\rangle$, pour tout $\xi \in \Xi$ et pour tout voisinage $v(x^{(\xi)})$ de rang α d'un point $x^{(\xi)}$ quelconque de R_ξ, $p_\xi^{-1}(v(x^{(\xi)}))$ est un

---

1) K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 318-322 (1966).

2) Nous disons qu'un espace rangé S satisfait à l'axiom (c) lorsque pour tous deux voisinages $u(x)$ de rang α et $v(x)$ de rang β d'un point x quelconque de S tels que l'on a

$$u(x) \supseteqq v(x) \text{ et } \alpha < \beta$$

il existe, pour tout nombre ordinal $\gamma(\alpha<\gamma<\beta)$, au moins un voisinage $w(x)$ de rang γ du point x tel que l'on a

$$u(x) \supseteqq w(x) \supseteqq v(x).$$

voisinage de rang α du point x de R tel que $p_\xi(x)=x^{(\xi)}$.

Proposition 1. *Supposons que tous espaces $R_\xi(\xi\in\Xi)$ satisfont à l'axiom (T_1) de séparation de M. Fréchet.*[3] *Alors, sur l'espace rangé $\langle R=\prod R_\xi, \rho_1\rangle$, pour que*

$$x=\lim_\alpha\text{-}q\text{-prop}\, x_\alpha{}^{4)} \quad \textit{dans } \langle R, \rho_1\rangle$$

il faut et il suffit que, pour tout $\xi\in\Xi$,

$$p_\xi(x)=\lim_\alpha\text{-}q\text{-prop}\, p_\xi(x_\alpha) \quad \textit{dans } R_\xi.$$

Démonstration. Soit $\{x_\alpha\mid 0\leq\alpha<\omega\}$ une suite des points de R et soit x un point de R. Et soient que, pour tout $\xi\in\Xi$, $x^{(\xi)}=p_\xi(x)$ et que $x_\alpha^{(\xi)}=p_\xi(x_\alpha)$.

D'abord supposons que

$$x=\lim_\alpha\text{-}q\text{-prop}\, x_\alpha \quad \text{dans } \langle R, \rho_1\rangle$$

et prenons un indice ξ quelconque de Ξ et le fixerons.

Soit $y^{(\xi)}$ un point de R_ξ distinct de $x^{(\xi)}$ et soit y le point de R tel que

$$p_\eta(y)=\begin{cases} y^{(\xi)} & \text{lorsque } \eta=\xi \\ x^{(\eta)} & \text{lorsque } \eta\neq\xi. \end{cases}$$

Comme $x\neq y$, il existe une suite fondamentale $\{V_\alpha(x)\mid 0\leq\alpha<\omega\}$ des voisinages par rapport à x[5] dans R telle que pour tout nombre ordinal $\alpha(0\leq\alpha<\omega)$ on a

$$x_\alpha\in V_\alpha(x)$$

et que l'on a

$$y\notin\bigcap_\alpha V_\alpha(x).$$

Puisque tous $V_\alpha(x)$ sont normals, il existe un nombre ordinal $\alpha_0(0\leq\alpha_0<\omega)$ tel que l'on a

$$p_\xi(V_{\alpha_0}(x))\neq R_\xi.$$

Donc, la suite $\{p_\xi(V_\alpha(x))\mid 0\leq\alpha<\omega\}$ des voisinages par rapport au point $x^{(\xi)}$ dans R_ξ définit la relation

$$x^{(\xi)}\in\left\{\lim_\alpha x_\alpha^{(\xi)}\right\}^{1)}$$

et l'on a

$$y^{(\xi)}\notin\bigcap_\alpha p_\xi(V_\alpha(x)).$$

En suite, soit $\{u_\alpha(y^{(\xi)})\}$ une suite fondamentale des voisinages par rapport au point $y^{(\xi)}$ dans R_ξ telle que l'on a

$$x^{(\xi)}\notin\bigcap_\alpha u_\alpha(y^{(\xi)})$$

et soient pour tout $\alpha(0\leq\alpha<\omega)$

$$U_\alpha(y)=p_\xi^{-1}(u_\alpha(y^{(\xi)})).$$

---

3) Avec cette condition l'espace $\langle R=\Pi R_\xi, \rho_1\rangle$ satisfait aussi à l'axiom (T_1).

4) Y. Yoshida: Sur les convergences dans l'espace rangé. I. Proc. Japan Acad., **42**, 473-476 (1966).

5) K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. II (à paraître).

Alors, la suite $\{U_\alpha(y) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ est celle fondamentale des voisinages par rapport au point y dans R telle que l'on a

$$x \notin \bigcap_\alpha U_\alpha(y).$$

Donc, il existe un nombre ordinal $\alpha_0 (0 \leq \alpha_0 < \omega)$ tel que la suite $\{x_\alpha\}$ est résiduelle dans la complimentaire de $U_{\alpha_0}(y)$.

Par conséquent, la suite des points $\{x_\alpha^{(\xi)}\}$ est résiduelle dans de $u_{\alpha_0}(y^{(\xi)})$.

Donc, on a

$$x^{(\xi)} = \lim_\alpha\text{-}q\text{-prop } x_\alpha^{(\xi)} \quad \text{dans } R_\xi$$

c'est-à-dire que

$$p_\xi(x) = \lim_\alpha\text{-}q\text{-prop } p_\xi(x_\alpha) \quad \text{dans } R_\xi.$$

Inversement supposons que, pour tout $\xi \in \Xi$

$$p_\xi(x) = \lim_\alpha\text{-}q\text{-prop } p_\xi(x_\alpha) \quad \text{dans } R_\xi.$$

Soit y un point quelconque de R distinct de x, et soient que, pour tout $\xi \in \Xi$,

$$y^{(\xi)} = p_\xi(y).$$

Comme $x \neq y$, il existe au moins un indice $\xi_0 \in \Xi$ tel que l'on a

$$x^{(\xi_0)} \neq y^{(\xi_0)}$$

donc, il existe une suite fondamentale

$$\{v_\alpha(x^{(\xi_0)}) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

des voisinages par rapport au point $x^{(\xi_0)}$ dans R_{ξ_0} qui définit la relation

$$x^{(\xi_0)} \in \left\{\lim_\alpha x_\alpha^{(\xi_0)}\right\}$$

et telle que l'on a

$$y^{(\xi_0)} \notin \bigcap_\alpha v_\alpha(x^{(\xi_0)}).$$

Donc, la suite des voisinages

$$\{p_{\xi_0}^{-1}(v_\alpha(x^{(\xi_0)})) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

du point x dans $\langle R, \rho_1 \rangle$ définit la relation

$$x \in \left\{\lim_\alpha x_\alpha\right\}$$

et l'on a

$$y \notin \bigcap_\alpha p_{\xi_0}^{-1}(v_\alpha(x^{(\xi_0)})).$$

Ensuite, soit

$$\{U_\alpha(y) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

une suite fondamentale des voisinages par rapport à y quelconque dans $\langle R, \rho_1 \rangle$ telle que

$$x \notin \bigcap_\alpha U_\alpha(y).$$

Alors, il existe au moins un indice $\xi_1 \in \Xi$ tel que l' on a

$$x^{(\xi_1)} \notin \bigcap_\alpha p_{\xi_1}(U_\alpha(y)).$$

Comme $\{p_{\xi_1}(U_\alpha(y)) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ est une suite fondamentale des voisinages par rapport au point $y^{(\xi_1)}$ dans R_{ξ_1}, il existe un nombre $\alpha_0(0\leq\alpha_0<\omega)$ tel que la suite $\{x_\alpha{}^{(\xi_1)}\}$ est résiduelle dans la complimontaire de $p_{\xi_1}(U_{\alpha_0}(y))$. Donc, la suite $\{x_\alpha\}$ est résiduelle dans la complimentaire de $U_{\alpha_0}(y)$.

Par conséquent

$$x=\lim_\alpha\text{-}q\text{-prop } x_\alpha \quad \text{dans } \langle R, \rho_1\rangle \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Avec la supposition de la proposition 1, sur l'espace rangé $\langle R=\prod R_\xi, \rho_1\rangle$ on a trois corollaires suivants:

Corollaire 1. *Toute la projection* $p_\xi: R\longrightarrow R_\xi$ *est continue* (QP).[6]

Corollaire 2. *Pour que*

$$x\in\{\lim_\alpha x_\alpha\} \quad \textit{dans } \langle R, \rho_1\rangle$$

il suffit que pour au moins un indice $\xi\in\Xi$

$$p_\xi(x)\in\left\{\lim_\alpha p_\xi(x_\alpha)\right\} \quad \textit{dans } R_\xi.$$

Corollaire 3. *Si l'on a*

$$x=\lim_\alpha\text{-prop } x_\alpha{}^{1)} \quad \textit{dans } \langle R, \rho_1\rangle$$

alors, pour tout $\xi\in\Xi$ *on a*

$$p_\xi(x)=\lim_\alpha\text{-prop } p_\xi(x_\alpha) \quad \text{dans } R_\xi.$$

Nous montrons, dans l'example suivant, que la inverse de corollaire 3 n'est pas vraie.

Example 1. Sur l'ensemble $R_\xi(0\leq\xi<\omega_0)$ la totalité des nombres réels muni de la topologie ordinaire, prenons pour le voisinage de rang $n(0\leq n<\omega_0)$ d'un point $x^{(\xi)}$ quelconque de R_ξ, l'ensemble R_ξ lorsque $n=0$ et l'ensemble

$$v_n^\xi(x^{(\xi)})=\{z^{(\xi)}\mid z^{(\xi)}\in R_\xi, \mid z^{(\xi)}-x^{(\xi)}\mid<2^{-n}\}$$

lorsque $0<n<\omega_0$.

Dans l'espace rangé R_ξ dont l'indicateur est ω_0, les relations

$$x^{(\xi)}\in\left\{\lim_n x_n^{(\xi)}\right\}$$

$$x^{(\xi)}=\lim_n\text{-prop } x_n^{(\xi)}$$

$$x^{(\xi)}=\lim_n\text{-}q\text{-prop } x_n^{(\xi)}$$

et $\quad \mid x_n^{(\xi)}-x^{(\xi)}\mid\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)$ (au sens ordinaire)

sont équivalentes l'un à l'autre.

Dans l'espace rangé $\langle R=\prod_{0\leq\xi<\omega_0} R_\xi, \rho_1\rangle$, soient

---

6) Nous disons qu'une application f d'un espace rangé R_1 dans un autre espace rangé R_2 est continue (QP) lorsqu'elle satisfait á la condition:

$$x\in\{\lim_\alpha\text{-}q\text{-prop } x_\alpha\}(\text{dans } R_1)$$

entraîne que

$$f(x)\in\{\lim_\alpha\text{-}q\text{-prop } f(x_\alpha)\} \ (\text{dans } R_2).$$

$$x=(x^{(\xi)}\mid 0\leq\xi<\omega_0) \quad \text{où} \quad x^{(\xi)}\in R_\xi \text{ et } x^{(\xi)}\equiv 0$$

$$x_n=(x_n^{(\xi)}\mid 0\leq\xi<\omega_0) \quad \text{où} \quad x_n^{(\xi)}\in R_\xi \text{ et } x_n^{(\xi)}\equiv 2^{-n} \quad (0\leq n<\omega_0)$$

$$y=(y^{(\xi)}\mid 0\leq\xi<\omega_0) \quad \text{où} \quad y^{(\xi)}\in R_\xi \text{ et } y^{(\xi)}=2^{-\xi}.$$

Alors, on a pour tout ξ $(0\leq\xi<\omega_0)$

$$x^{(\xi)}=\underset{n}{\text{lim-prop}}\ x_n^{(\xi)} \quad \text{dans } R_\xi$$

et l'on a

$$x\in\{\lim_n x_n\} \quad \text{dans } \langle R, \rho_1\rangle.$$

Soit

$$V(y)=\bigcup_{0<\xi<\omega_0} p_\xi^{-1}(v_\xi^\xi(y^{(\xi)}))$$

alous $V(y)$ est un voisinage du point y de R ne contenant pas le point x. Mais, pour tout nombre ordinal $m(0<m<\omega_0)$, la suite $\{x_n\}$ des points de R est résiduelle dans le voisinage $p_m^{-1}(v_m^m(y^{(m)}))$ de rang m du point y de R, lequel est contenu dans $V(y)$.

Donc, on a

$$x\neq\underset{n}{\text{lim-prop}}\ x_n.$$