231. Sur les espaces duels des espaces de Stepanoff et de Weyl. II

Par Yukio YOSHIDA
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1966)

Dans la note [2], nous avons étudié la propriété de la fonction d'ensemble définie par un élément de S^*.

Maintenant, nous allons montrer que la réciproque de la proposition 1 de [2] est aussi exacte, et que tout élément de S^* peut être representer par intégrale. Et suivant-le, nous étudions la réalisation de l'espace W^* duel de l'espace W.

Proposition 2. *Supposons qu'une fonction d'ensembles φ, dé finie pour toute partie mesurable de R, à valeurs complexes finies, satisfasse aux conditions (1) et (2) de la Proposition 1 et (3′) suivante:*

(3′) $$\|\varphi\|<+\infty.$$

Alors la fonctionnelle f sur E définie par l'égalité

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi(A_i) \qquad \left(x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi(A_i)\right)$$

est linéaire.

Démonstration: Il suffit pourvu que nous montrions seulement la continuité de f.

Pour un nombre positif ε quelconque, posons

$$\delta=\frac{\varepsilon}{1+4\|\varphi\|}$$

et supposons que $\|x\|<\delta$.

Par la condition (2), pour le nombre $\dfrac{\varepsilon}{4m\alpha}$ (oú $\alpha=1+\max_i |\alpha_i|$) il existe un nombre positif η tel que

$$\|\chi(A)\|<\eta \quad \text{entraîne} \quad |\varphi(A)|<\frac{\varepsilon}{4m\alpha}. \tag{**}$$

Par le lemme 1, il existe une fonction l-régulière

$$x_0(t)=\sum_{i,j=1}^{m,n}\alpha_{ij}\chi(A_{ij};t)$$

telle que

$$\|x-x_0\|<\delta.$$

On peut supposer que, pour tout intervalle I de $\varDelta$ contenu à $B_j=\bigcup_{i=1}^{m}A_{ij}$, on ait

$$\text{mes}\,(I\cap(A_i\triangle A_{ij}))<l\cdot\eta^p$$

et que $\alpha_{ij}=\alpha_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$.

Posons $C_i=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$. À chaque I de Δ, il existe un nombre $j(1\leqq j\leqq n)$ tel que $I\subseteq B_j$. Pour ces I et j on a

$$\begin{aligned}&\int_I |\chi(A_i\triangle C_i)|^p dt\\ &=\int_I |\chi(A\triangle A_{ij})|^p dt\\ &=\mathrm{mes}\,(I\cap(A_i\triangle A_{ij}))\\ &<l\cdot\eta^p.\end{aligned}$$

Donc on a

$$\|\chi(A_i\triangle C_i)\|<\eta.$$

Il résulte de cette inégalité et de (**) que

$$|\varphi(A_i-C_i)|<\frac{\varepsilon}{4m\alpha} \quad \text{et} \quad |\varphi(C_i-A_i)|<\frac{\varepsilon}{4m\alpha}.$$

Et maintenant, nous montrons que $|f(x)|<\varepsilon$. D'abord

$$\begin{aligned}|f(x_0)|&=\left|\sum_{i,j=1}^{m,n}\alpha_{ij}\varphi(A_{ij})\right|\\ &\leqq\sum_{i,j=1}^{m,n}|\alpha_{ij}|\,|\varphi(A_{ij})|\\ &\leqq\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|^p\,|A_{ij}|\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}}\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leqq\|x_0\|\,\|\varphi\|\\ &\leqq 2\delta\cdot\|\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(x_0)|\\ &=\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi(A_i)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\varphi(A_{ij})\right|\\ &\leqq\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\left|\varphi(A_i)-\sum_{j=1}^{n}\varphi(A_{ij})\right|\\ &=\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\,|\varphi(A_i)-\varphi(C_i)|\\ &\leqq\alpha\sum_{i=1}^{m}\{|\varphi(A_i-C_i)|+|\varphi(C_i-A_i)|\}\\ &<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|f(x)|<\varepsilon. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Soit Φ_l l'espace normé qui est constitué de toute les φ satisfaisant aux conditions de la proposition 2 et dont la norme est donnée par $\|\varphi\|_l$. Alors, il résulte des propositions 1 et 2 que l'application $f\rightarrow\varphi$ de S_l^* sur Φ_l est un isomorphisme d'espace linéair préservant la norme.

De plus, on voit que toute f de S_l^* peut être representer par l'intégrale de Radon

$$f(x)=\int x(t)d\varphi.$$

Remarque 1. Lorsque $p=1$, il convient de poser

$$\|\varphi\|=\sup\left\{\sum_{j=1}^{m}\max_{i}\left(\frac{|\varphi(A_{ij})|}{|A_{ij}|}\right)\Big|\{A_{ij}\}\right\}.$$

§ 3 Espace W*. Dans ce paragraph, nous allons étudier l'espace W^* duel de l'espace W.

Lemme 2. *Etant donné deux nombres positifs l et l' quelconque, si l'on a*

$$(n-1)l<l'\leqq nl$$

où n est un nombre entier positif, alors pour toute fonction élémentaire x nous avons

$$\frac{1}{n}\|x\|_l\leqq\|x\|_{l'}\leqq\left(1+\frac{2l}{l'}\right)^{\frac{1}{p}}\|x\|_l.$$

En particulier, lorsque $l'=nl$, on a $\|x\|_{l'}\leqq\|x\|_l$.[1]

Donc S_l est coincident avec $S_{l'}$ comme ensemble, et isomorphe à $S_{l'}$ comme espace normé en correspondant tout élément de S_l à lui-même appartenant à $S_{l'}$. Il en est de même de E_l et $E_{l'}$, de S_l^* et $S_{l'}^*$ et de Φ_l et $\Phi_{l'}$.

Désignons désormais par E, S, S^* et Φ les ensembles E_l, S_l, S_l^* et Φ_l respectivement.

Lemme 3. *Pour deux nombres l et l' de lemme 2 et pour tout élément φ de Φ nous avons*

$$n\|\varphi\|_l\geqq\|\varphi\|_{l'}\geqq\left(1+\frac{2l}{l'}\right)^{-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_l.$$

Lorsque $l'=nl$, on a $\|\varphi\|_{l'}\geqq\|\varphi\|_l$.

Lemme 4. *Pour tout élément x de E et pour tout élément φ de Φ*

$$\|x\|_W=\lim_{l\to+\infty}\|x\|_l \quad et \quad \|\varphi\|_W=\lim_{l\to+\infty}\|\varphi\|_l$$

existent. Et à chaque nombre positif l nous avons

$$\|x\|_l\geqq\|x\|_W \quad et \quad \|\varphi\|_l\leqq\|\varphi\|_W\leqq+\infty.$$

Si l'on identifie deux fonctions élémentaires $x(t)$ et $y(t)$ telles que $\|x-y\|_W=0$, alors l'ensemble E devient un espace normé.

Désignons-le par E_W, par W la complétion de E_W et par W^* l'espace duel de W. Tout élément x de S peut être considérer comme un élément de W et l' on a

$$\|x\|_W=\lim_{l\to+\infty}\|x\|_l=\inf_l\|x\|_l.$$

On vois sans peine que la restriction f_l à S_l d'un élément f de

1) p. 72 de [1].

W^* appartient à S_l^* et l' on a

$$\|f_l\|_l \leqq \|f\|_W$$

où $\|f\|_W$ est la norme de f de W^*.

Proposition 3. *Etant donné un élément f de W^*, la fonction d'ensemble $\varphi(A)$, définie pour tout sous ensemble mesurable A de R telle que*

$$\varphi(A)=f(\chi(A))$$

satisfait aux quatres conditions suivantes:

(*1*) *pour tout ensemble mesurable A on a $|\varphi(A)|<+\infty$.*

(*2*) *φ est additive.*

(*3*) *pour tout nombre positif ε il existe un nombre positif η tel que*

$$\|\chi(A)\|_W<\eta \quad \textit{entraîne} \quad |\varphi(A)|<\varepsilon.$$

(*4*) $\|\varphi\|_W=\|f\|_W$.

Démonstration. (1), (2), et (3) sont évidentes.

Sur (4), à chaque nombre positif l, on a

$$\varphi(A)=f_l(\chi(A))$$

donc $\varphi \in \Phi$. Par conséquent

$$\|\varphi\|_l=\|f_l\|_l \leqq \|f\|_W$$

donc on a

$$\|\varphi\|_W \leqq \|f\|_W.$$

Inversement, quelque soit un nombre positif ε il existe une fonction élémentaire x_W tel que

$$\|x\|_W=1 \quad \text{et} \quad \|f\|_W-\varepsilon<|f(x)|.$$

Par $\|x\|_W=1$, il y a un nombre positif l tel que

$$\|x\|_l \leqq 1+\varepsilon.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{|f(x)|}{\|x\|_l}\|x\|_l \\ &\leqq \|f_l\|_l(1+\varepsilon) \\ &= \|\varphi\|_l(1+\varepsilon) \\ &\leqq \|\varphi\|_W(1+\varepsilon) \\ \therefore \quad \|f\|_W &< |f(x)|+\varepsilon \\ &\leqq \|\varphi\|_W(1+\varepsilon)+\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc nous avons

$$\|f\|_W \leqq \|\varphi\|_W.$$

Par conséquent

$$\|f\|_W=\|\varphi\|_W. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Proposition 4. *Supposons qu'une fonction d'ensembles φ, définie pour tout sous ensemble mesurable de R, à valeurs complexes finies, satisfasse aux conditions (2) et (3) de la proposition 3 et (4') suivante:*

(*4'*) $\|\varphi\|_w<+\infty$.

Alors la fonctionnelle f sur E_W définie par l'égalité

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi(A_i) \qquad \left(x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi(A_i)\right)$$

est linéaire.

Démonstration. D'abord, nous montrons que $\varphi\in\Phi$. Soient l et ε nombres positifs quelconque et η le nombre défini pour ε par la condition (3). Alors, $\|\chi(A)\|_l<\eta$ entraîne $|\varphi(A)|<\varepsilon$, parce que $\|\chi(A)\|_W\leqq\|\chi(A)\|_l$. Et, par la condition (4') on a $\|\varphi\|_l<+\infty$. Par la proposition 2, on a $\varphi\in\Phi$ et f est une fonctionnelle linéaire sur l'espace E_l.

Nous montrons que f est continue dans l'espace E_W.

Pour un nombre positif ε quelconque, posons

$$\delta=\frac{\varepsilon}{1+4\|\varphi\|_W}.$$

Soit x un élément de E_W. Si l'on a $\|x\|_W<\delta$, alors il existe un nombre positif l tel que l'on a

$$\|x\|_l<\delta.$$

D'autre part on a

$$\delta=\frac{\varepsilon}{1+4\|\varphi\|_W}\leqq\frac{\varepsilon}{1+4\|\varphi\|_l}.$$

Donc, par la démonstration de la Proposition 2, on a

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

C'est-à-dire que f est continue dans l'espace E_W. c.q.f.d.

Soit Φ_W l'espace normé qui est constitué de toute les φ appartenant à Φ et satisfaisant à l'inégalité $\|\varphi\|_W<+\infty$ et dont la norme est donnée par $\|\varphi\|_W$. Alors, il résulte des propositions 3 et 4 que l'application $f\longrightarrow\varphi$ de W^* sur Φ_W est un ismorphisme d'espace linéair préservant la norme.

De plus, on voit que toute f de W^* peut être representer par l'intégrale de Radon

$$f(x)=\int x(t)d\varphi.$$

Remarque 2. Propositions 3 et 4 sont aussi établies pour $p=1$.

Références

[1] A. S. Besicovitch: Almost Periodic Functions. Dover Publications Inc., New York (1954).

[2] Y. Yoshida: Sur les espaces duels des espaces de Stepanoff et de Weyl. I. Proc. Japan Acad., **42**, 1060-1065 (1966).