98. *Note sur les Espaces Spéciaux de Dirichlet*

par Masayuki ITÔ
Institut Mathématique, Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., June 12, 1967)

1. Il est bien connu que les espaces de Dirichlet ont beaucoup de propriétés importantes dans la théorie du potentiel. Mais, nous n'avons pas connu la condition qui décide si un noyau donné est un noyau d'un espace de Dirichlet. Dans cette note, d'abord nous considérerons un espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}$ sur l'espace euclidien $R^n(n\geq 1)$. Alors, nous obtiendrons que tout élément de $\mathfrak{X}$ soit égal à une constante ou qu'on puisse associer un espace spécial $D(\mathfrak{X})$ de Dirichlet sur R^n et un espace $\mathfrak{X}_c$ constitué par des constantes, satisfait à $\mathfrak{X}=D(\mathfrak{X})\oplus\mathfrak{X}_c$ si le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$. Employant ce résultat, nous obtiendrons qu'un noyau positif, symétrique et continu (au sens large) k de convolution sur R^n soit égal à une constante non-négative ou qu'on puisse associer un noyau continu (au sens large) k_0 d'un espace spécial de Dirichlet et une constante non-négative $C(k)$ satisfait à $k=k_0+C(k)$ si ce noyau k satisfait au principe de domination.

2. D'abord, nous donnerons des notations d'ensembles de fonctions. On désignera par C_K l'espace des fonctions finies et continues à support compact muni de la topologie usuelle, et par C_K^+ l'ensemble des éléments non-négatifs de C_K. De plus, on désignera par M l'ensemble des fonctions bornées et mesurables à support compact, et par M^+ l'ensemble des éléments non-négatifs de M. Nous donnerons la définitions d'un espace fonctionel invariable (sur R^n) et la définition d'un espace spécial de Dirichlet (sur R^n).[1]

Définition 1. Un espace hilbertien $\mathfrak{X}$ s'appelle un espace fonctionel invariable (sur R^n) si tout élément de $\mathfrak{X}$ est une fonction réelle et localement sommable, verifiant les conditions suivants:

(a) A tout compact K de R^n, on peut associer une constante positive $A(K)$ telle qu'on ait, pour toute u de $\mathfrak{X}$,

$$\int_K |u(x)|\,dx\leq A(K)\,||u||.$$

(b) A toute u de $\mathfrak{X}$ et tout point x de R^n, on a $\tau_x u\in\mathfrak{X}$ et $||\tau_x u||=||u||$, ou $\tau_x u(y)=u(y-x)$.

Définition 2. Un espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}$ s'appelle un

---

1) On peut donner les mêmes définitions sur un groupe abélien localement compact.

espace spécial de Dirichlet (sur R^n) si les conditions additionnelles suivantes sont verifiées:

(c) L'intersection $C_K \cap \mathfrak{X}$ est dense dans $\mathfrak{X}$ et dans C_K.

(d) A toute contraction normale T de la droite réelle R[2] et toute u de $\mathfrak{X}$, on a $T \cdot u \in \mathfrak{X}$ et $\| T \cdot u \| \leq \| u \|$.

Quand un espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}$ satisfait à la condition (d), on dit que les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}$. Dans cette note, nous supposerons que $\mathfrak{X}$ est un espace fonctionel invariable. D'après le théorème de Riesz, à toute f de M, on peut associer un élément u_f unique de $\mathfrak{X}$ tel qu'on ait, pour toute v de $\mathfrak{X}$,

$$(u_f, v) = \int v(x) f(x) d\xi(x),$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire de $\mathfrak{X}$. Cet élément u_f s'appelle le potentiel de f dans $\mathfrak{X}$. Posons $P(\mathfrak{X}) = \{u_f \in \mathfrak{X}; f \in M)$. Alors, $P(\mathfrak{X})$ est dense dans $\mathfrak{X}$. Nous obtenons que la convergence forte de $\mathfrak{X}$ entraîve la convergence presque partout.

Le principe de domination: On dit que le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$ si, quelles que soient f et g de M^+, l'inégalité $u_f(x) \leq u_g(x)$ est satisfaite presque partout sur R^n dès qu'elle l'est presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$.

Pour un espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}$, on designera par $\mathfrak{X}_0$ l'adherence de $\{u \in \mathfrak{X}; S_u$ *est compact*$\}$.[3]

Lemme 1. *L'intersection $C_K \cap \mathfrak{X}_0$ est dense dans $\mathfrak{X}_0$.*

En effect, soit u une fonction de $\mathfrak{X}$ à support compact. Nous obtenons une suite (φ_n) de C_K^+, qui converge vaquement à la mesure δ de Dirac avec $n \to +\infty$, telle que, pour tout n, $\int \varphi_n(x) dx = 1$ et la suite (S_{φ_n}) converge en décroissant à $\{0\}$ avec $n \to +\infty$. D'après le théorème de Deny (voir [3]), la convolution $u * \varphi_n$ appartient à $\mathfrak{X}_0$. Par la continuité forte de l'application de $x \in R^n$ à $\tau_x u \in \mathfrak{X}$ pour toute u de $\mathfrak{X}$, la suite $(u * \varphi_n)$ converge fortement dans $\mathfrak{X}$ vers u avec $n \to +\infty$.

Deny [4] a démontré le lemme suivant.

Lemme 2. *Si le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$, let contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}$.*

Soit c un nombre positif. On désignera par $\mathfrak{X}^{(c)}$ l'espace fonctionel invariable introduit [7] et [8], et désignera par $u_f^{(c)}$ le potentiel de $f \in M$ dans $\mathfrak{X}^{(c)}$. Depuis que le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ et qu'on a $\mathfrak{X}^{(c)} \supset M$, l'espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}_0^{(c)}$ est un espace spécial de Dirichlet par Lemme 1. Beurling et Deny

2) On l'appelle une application T de R à R satisfaisant aux $T(0)=0$ et $|T(a_1) - T(a_2)| \leq |a_1 - a_2|$ pour tout couple a_1 et a_2 de R.

3) On désigne par S_u le support de u.

[1], [3] ont démontré que, pour un espace spécial $\mathfrak{X}$ de Dirichlet, on peut associer une fonction définie négative $\lambda(x)$ sur R^n, c'est-à-dire

$$\lambda(x)=C+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j+\int(1-e^{2\pi i x\cdot y})d\sigma(y)$$

où C est une constante non-négative, $\sum a_{ij}x_i x_j$ est une forme positive et hermitienne et σ est une mesure positive dans $R^n-\{0\}$ satisfaisant aux

$$\int_{|x|>0} d\sigma<+\infty \quad \text{et} \quad \int_{0<|x|<r} |x|^2 d\sigma(x)<+\infty$$

pour tout $r>0$, et on a

$$\|\varphi\|^2=\int|\hat{\varphi}(x)|^2\lambda(x)dx$$

pour toute φ de $C_K\cap\mathfrak{X}$ et sa transformation de Fourier $\hat{\varphi}$. Nous employons la notation $f_{(m)}(x)=f(mx)$ pour une fonction f et un nombre réel m.

Lemme 3. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace spécial de Dirichlet. Pour toute u de $\mathfrak{X}$ et tout nombre $m\neq 0$, la fonction $u_{(m)}$ appatient* à $\mathfrak{X}$ *et on a* $\|u_{(m)}\|\leq \max(1, |m|)\,\|u\|$.

Pour démontrer, il suffit de se borner au cas $u\in C_K\cap\mathfrak{X}$. Parce que $C_K\cap\mathfrak{X}$ est dense dans $\mathfrak{X}$. Soit

$$\lambda(x)=C+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j+\int(1-e^{2\pi i x\cdot y})d\sigma(y)$$

la fonction définie négative associée à $\mathfrak{X}$. On a

$$\begin{aligned}
&\int|\hat{u}_{(m)}(x)|^2\lambda(x)dx\\
&=m^n\int|\hat{u}(m^{-1}x)|^2\Big(C+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j+\int(1-e^{2\pi i x\cdot y})d\sigma(y)\Big)dx\\
&=\int|\hat{u}(x)|^2\Big(C+m^2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j+\int(1-e^{2\pi i m x\cdot y})d\sigma(y)\Big)dx\\
&\leq\int|\hat{u}(x)|^2\Big(C+m^2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j+m^2\int(1-e^{2\pi i x\cdot y})d\sigma(y)\Big)dx\\
&\leq \max(1, m^2)\int|u(x)|^2\lambda(x)dx=\max(1, m^2)\,\|u\|^2.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Deny (voir [3]), on a $u_{(m)}\in\mathfrak{X}$ et $\|u_{(m)}\|\leq\max(1, |m|)\,\|u\|$).

Lemme 4. *Soit κ le noyau d'un espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}$*[4] *qui satisfait au principe de domination. Si $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_0$, la transformation de Fourier $\hat{\kappa}$ de κ est une fonction non-négative et localement sommable dans R^n et la fonction $\lambda(x)=(\hat{\kappa}(x))^{-1}$ est semi-continue inférieurement et satisfait à*

---

4) Pour $\mathfrak{X}$, si $u_f\geq 0$ pour toute f de M^+, il existe une mesure positive κ de type positif telle que $u_f=\kappa * f$ pour toute f de M (voir [4]). Cette mesure κ est appelé le noyau de $\mathfrak{X}$.

$$\sum_{i,j=1}^{m} \lambda(x^i - x^j)\rho_i\bar{\rho}_j \leq 0$$

pour touts les m points $(x^i)_{i=1}^m$ *de* R^n *et tous les m nombres complexes* $(\rho_i)_{i=1}^m$ *avec* $\sum_{i=1}^m \rho_i = 0$, *si* $\lambda(x^i - x^j) < +\infty$ *pour tous* i, j.

En effet, soit c un nombre positif. Depuis que le noyau de l'espace fonctionel invariable $\mathfrak{X}^{(c)}$ est $\kappa + c\delta$ et que $\mathfrak{X}^{(c)}$ est un espace spécial de Dirichlet, la transformation de Fourier $\widehat{\kappa + c\delta}$ de $\kappa + c\delta$ est une fonction positive et localement sommable, ou δ est la mesure de Dirac. Cela revient de dire que $\hat{\kappa}$ est une fonction non-négative et localement sommable. De plus, depuis que la fonction $\lambda_c(x) = (\widehat{\kappa + c\delta}(x))^{-1}$ est définie négative, c'est-à-dire que λ_c est finie, continue et satisfait à

$$\sum_{i,j=1}^{m} \lambda_c(x^i - x^j)\rho_i\bar{\rho}_j \leq 0$$

pour tous les m points $(x^i)_{i=1}^m$ de R^n et tous les m nombres complexes $(\rho_i)_{i=1}^m$ avec $\sum_{i=1}^m \rho_i = 0$.[5] Les fonction $\lambda_c(x)$ convergeant en croissant vers $\lambda(x)$ avec $c \searrow 0$, $\lambda(x)$ est semi-continue inférieurement et satisfait à

$$\sum_{i,j=1}^{m} \lambda(x^i - x^j)\rho_i\bar{\rho}_j \leq 0$$

pour des mêmes $(x^i)_{i=1}^m$ et $(\rho_i)_{i=1}^m$.

Lemme 5. *Soient* $\mathfrak{X}$, κ *et* $\lambda(x)$ *ceux qui sont mentionnes au Lemme* 4. *On a, pour toute* φ *de* $C_K \cap \mathfrak{X}$,

$$||\varphi||^2 = \int |\hat{\varphi}(x)|^2 \lambda(x) dx$$

En effet, depuis que $M \subset \mathfrak{X}^{(c)}$ pour tout $c > 0$ (voir [8]), on a, pour tout $c > 0$,

$$||\varphi||_c^2 = \int |\hat{\varphi}(x)|^2 \lambda_c(x) dx,$$

ou $||\cdot||_c$ est la norme de $\mathfrak{X}^{(c)}$. Faisant $c \to 0$, nous obtenons que

$$||\varphi||^2 = \int |\hat{\varphi}(x)|^2 \lambda(x) dx.$$

D'autre part, de la même manière qu'au cas d'un espace spécial de Dirichlet (voir [2] et [3]), nous obtenons $\varphi \in \mathfrak{X}$ et $||\varphi||^2 = \int |\hat{\varphi}(x)|^2 \lambda(x) dx$ si la fonction φ de C_K satisfait à l'inégalité $\int |\hat{\varphi}(x)|^2 \lambda(x) dx < +\infty$. Employant les lemmes susdits, nous obtenons le thèorème suivant.

Théorème 1. *Supposons que le principe de domination est satisfait dans* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0$. *Alors,* $\mathfrak{X}$ *est un espace special de Dirichlet ou* $\mathfrak{X} = \{0\}$.

---

5) Au sujet de la fonction définie négative, voir [5].

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{X}\neq\{0\}$. Par Lemme 1, on a $C_K\cap\mathfrak{X}\neq\{0\}$. Il suffit de démontrer que, pour tous $0<r<R$, il existe une fonction $\varphi_{r,R}$ de $C_K\cap\mathfrak{X}$ telle que $\varphi_{r,R}\geq 0$, $\varphi_{r,R}(x)=1$ sur $B(0;r)$ et $\varphi_{r,R}(x)=0$ dans $\complement B(0;R)$, où $B(0;r)$ est une boule fermée centrée en o de rayon r. Par les lemmes 3, 5 et la condition (b), il existe une fonction φ de $C_K\cap\mathfrak{X}$ telle que $S_\varphi\subset B(0;1)$ et $\varphi(0)\neq 0$. Depuis que φ^+ et φ^- sont continués dans $\mathfrak{X}$ par le lemme 2 et la condition (d), nous pouvons supposer que φ est non-négative. A tout x de $B(0;r)$, nous associons la fonction $\tau_x\varphi_{((R-r)^{-1})}$. Par les lemmes 3, 5 on a $\tau_x\varphi_{((R-r)^{-1})}\in C_K\cap\mathfrak{X}$. Alors, il existe l'ensemble fini $(x^i)_{i=1}^m$ de $B(0;r)$ tel que la fonction

$$\varphi'_{r,R}(x)=\sum_{i=1}^m \tau x^i\varphi_{((R-r)^{-1})}(x)$$

est positive sur $B(0;r)$. Posons $d=\min\{\varphi_{r,R}(x);\, x\in B(0;r)\}$ et soit T la contraction unité.[6] Alors, la fonction

$$\varphi_{r,R}(x)=T\cdot(d^{-1}\varphi'_{r,R})(x)$$

satisfait aux conditions que nous avons desirées, et par suite, la démonstration est complète.

En général, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 2. *Si le principe de domination est satisfait dans* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_0$ *est un espace spécial de Dirichlet ou égal à* $\{0\}$ *et tout élément de l'espace* $\mathfrak{X}_0^\perp$ *dans* $\mathfrak{X}$ *est une constante.*

Démonstration. Employant le résultat que la convergence forte d'une suite (u_n) de $\mathfrak{X}_0$ à $u\in\mathfrak{X}_0$ entraîne la convergence faible de la suite $(T\cdot u_n)$ à $T\cdot u$ pour toute contraction normale T, nous obtenons que les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}_0$. Par le théorème 1, $\mathfrak{X}_0$ est un espace spécial de Dirichlet ou égal à $\{0\}$. Soient κ et κ_0 des noyaux de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_0$, respectivement, et soit c un nombre positif. Alors, le noyau de $\mathfrak{X}_0^{(c)}$ est $\kappa_0+c\delta$. Par suite, il suffit de démontrer que tout élément de $\mathfrak{X}_0^{(c)\perp}$ dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ est une constante. Depuis que $\kappa-\kappa_0$ est evidemment une mesure positive de type positif, $\mathfrak{X}_0^{(c)\perp}$ est un espace fonctionel invariable avec le noyau positif.[7] Posons $\kappa_1=\kappa-\kappa_0$. Pour toute fonction φ de C_K^+, il suffit de démontrer que $\kappa_1*\varphi*\check{\varphi}(x)$ est égale à une constante, où $\check{\varphi}(x)=\varphi(-x)$. Soit f une fonction de M^+ telle que $f(0)>0$ et $\int f(x)dx=1$, et soit ω un voisinage ouvert et relativement compact de S_f. Alors, on peut associer une fonction f' de L^2 avec $S_{f'}\subset\complement\omega$ telle que $u_{f'}^{(c)}\in\mathfrak{X}^{(c)}$, $u_f^{(c)}(x)=u_{f'}^{(c)}(x)$ presque partout sur $\complement\omega$, $u_f^{(c)}\geq u_{f'}^{(c)}$ et $\int f(x)dx\geq\int f'(x)dx$ (voir [7]).

6) On appelle la projection de R à $[0, 1]$ la contraction unité.

7) On l'appelle ainsi si, pour toute fonction f de M^+, le potentiel de f est non-négatif.

On a

$$0=(\kappa_1*\varphi*\check{\varphi},\ u_f^{(c)}-u_{f'}^{(c)})c$$
$$=\int\kappa_1*\varphi*\check{\varphi}(x)f(x)dx-\int\kappa_1*\varphi*\check{\varphi}(x)f'(x)dx,$$

où $(\cdot,\ \cdot)_c$ est le produit scalaire de $\mathfrak{X}^{(c)}$. En vertu des inégalités $\kappa_1*\varphi*\check{\varphi}(x)\leq\kappa_1*\varphi*\check{\varphi}(0)$ pour tout x de R^n et $\int f'(x)dx\leq 1$, nous obtenons que la fonction $\kappa_1*\varphi*\check{\varphi}(x)$ soit égale à une constante nonnégative. Par suite, la démonstration est complète.

Corollaire 1. *Soit k le noyau continue, symétrique et positif de convolution*[8] *qui satisfait au principe de domination. Alors, pour toute f de M, il existe une constante $c(x)$ telle que*

$$\lim_{x\to\infty}k*f*\check{f}(x)=C(k)\Big(\int f(x)dx\Big)^2,$$

et que $k-c(k)$ est un noyau d'un espace spécial de Dirichlet (*voir* [10]).

Corollaire 2. *Si le noyau ci-dessus k satisfait au principe de domination, alors k est non-dégénéré ou égal à une constante nonnégative* (*voir* [9]).

Références

[1] A. Beurling and J. Deny: Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sc., U.S.A. **45**, 208-215 (1959).

[2] G. Choquet and J. Deny: Aspectis linéaire de la théorie du potentiel. II. C. R. Acad. Sc. Paris, **243**, 4260-4261 (1960).

[3] J. Deny: Sur les espace de Dirichlet, Sém théorie du potentiel, no 5 (1957).

[4] ——: Principe complet du maximum et contractions. Ann. Institut de Fourier, **15**, 259-272 (1965).

[5] C. S. Herz: Théorie élémentaire des distributions de Beurling. Sém. Fac. Sc. d'Orsay, 1962-1963.

[6] M. Itô: On kernels of invariant functional spaces. Proc. Japan Acad., **42**, 433-437 (1966).

[7] ——: Note sur "contractions et principes du maximum". Osaka Math. J., (à paraître).

[8] ——: Balayage principle and Maximum principles on regular functional spaces. J. Sc. Hiroshima Univ. Ser. S-1 (to appear).

[9] M. Kishi: Unicity principles in the potential theory. Osaka Math. J., **13** 42-74 (1963).

[10] N. Ninomiya: Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique. J. Inst. Poly. Osaka City Univ., **8**, 147-179 (1957).

8) On l'appelle if κ est une fonction symétrique, positive, continue au sens large dans R^n, finiement continue dans R^n et localement sommable.