93. *Sur le développement en série d'une fraction continue du type des fractions de Stieltjes*

Par Marc DUPUIS

Institut de Physique du Collège d'Enseignement Général de l'Université de Tokyo et Maison Franco-Japonaise de Tokyo

(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M.J.A., June 12, 1967)

Considérons la série des puissances descendantes de la variable z

$$S=\frac{s_0}{z}-\frac{s_1}{z^3}+\frac{s_2}{z^5}-\cdots+(-1)^n\frac{s_n}{z^{2n+1}}+\cdots \tag{1}$$

et la fraction continue

$$F=\cfrac{c_0}{z+\cfrac{c_1}{z+\cfrac{c_2}{z+\ddots}}} \tag{2}$$

dont les coefficients $c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots$ sont des nombres quelconques, différents de zéro. Cette fraction est équivalente, comme on sait [1], à une fraction continue de Stieltjes à coefficients quelconques.*) Laissant de côté toute question de convergence, nous voulons considérer dans cette note le problème formel du passage de la fraction continue F à la série S.

Le problème de développer la série S en la fraction continue F a été résolu depuis longtemps par Frobenius [2], [3]. En désignant par A_n et B_n les déterminants de Hankel

$$A_0=1,\ A_n=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$B_0=1,\ B_n=\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} \end{vmatrix} \tag{4}$$

les coefficients de F sont reliés à ceux de S par les relations

$$\left.\begin{aligned} c_0&=s_0 \\ c_{2n-1}&=A_{n-1}B_n/A_nB_{n-1} \\ c_{2n}&=A_{n+1}B_{n-1}/A_nB_n \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Le problème inverse, qui est celui de développer la fraction continue F en la série S a aussi été résolu depuis longtemps, par

*) La fraction (2) est parfois appelée fraction du type S.

Stieltjes [4]. Selon les termes-mêmes de Stieltjes, on peut procéder de la manière suivante. On calcule d'abord les quantités $\alpha_{i,k}$ et $\beta_{i,k}$ par les relations

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{0,0}=1\\&\alpha_{i,k}=\beta_{i,k}=0 \quad \text{si} \quad i>k\end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{0,k}=\alpha_{0,k}+c_2\alpha_{1,k}\\&\beta_{1,k}=\alpha_{1,k}+c_4\alpha_{2,k}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\beta_{i,k}=\alpha_{i,k}+c_{2i+2}\,\alpha_{i+1,k}\end{aligned}\right\} \tag{6b}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{0,k+1}=c_1\beta_{0,k}\\&\alpha_{1,k+1}=c_3\beta_{1,k}+\beta_{0,k}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\alpha_{i,k+1}=c_{2i+1}\beta_{i,k}+\beta_{i-1,k}\end{aligned}\right\} \tag{6c}$$

Les coefficients de la série sont ensuite donnés par les expressions

$$\left.\begin{aligned}s_{i+k}&=c_0\alpha_{0,i}\alpha_{0,k}+c_0c_1c_2\alpha_{1,i}\alpha_{1,k}\\&\qquad+c_0c_1c_2c_3c_4\alpha_{2,i}\alpha_{2,k}+\cdots\\s_{i+k+1}&=c_0c_1\beta_{0,i}\beta_{0,k}+c_0c_1c_2c_3\beta_{1,i}\beta_{1,k}\\&\qquad+c_0c_1c_2c_3c_4c_5\beta_{2,i}\beta_{2,k}+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Même si les formules (6) peuvent être condensées sous forme de relations récurrentes matricielles [1], l'ensemble des formules (6) et (7) est plus compliqué que les formules (5), et le but de la présente note est d'établir des formules plus simples pour calculer les coefficients de S en fonction de ceux de F.

La remarque essentielle est que les dénominateurs des réduites de F, définies par

$$\frac{Q_1(z)}{P_1(z)}=\frac{c_0}{z},\ \cdots,\ \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}=\cfrac{c_0}{z+\cfrac{c_1}{z+\ddots+\cfrac{c_{n-1}}{z}}} \tag{8}$$

peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned}&P_1(z)=z\\&P_{2n-1}(z)=z^{2n-1}+S_1^{(2n-2)}z^{2n-3}+\cdots+S_p^{(2n-2)}z^{2n-2p-1}+\cdots S_{n-1}^{(2n-2)}z\\&P_{2n}(z)=z^{2n}+S_1^{(2n-2)}z^{2n-2}+\cdots+S_p^{(2n-1)}z^{2n-2p}+\cdots+S_n^{(2n-1)}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où les coefficients $S_p^{(n)}$ sont définis de la manière suivante: $S_1^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}c_k$ et $S_p^{(n)}$ est la somme de tous les produits de p coefficients c_k choisis parmi les n premiers d'entre eux $(1\leq k\leq n)$, de telle manière que dans chaque produit il n'y ait pas deux coefficients d'indices consécutifs; par exemple: $S_2^{(5)}=c_1c_3+c_1c_4+c_1c_5+c_2c_4+c_2c_5+c_3c_5$.

Pour établir les expressions (9), il suffit d'observer que les sommes $S_p^{(n)}$ obéissent à la relation de récurrence

$$S_p^{(n)}=S_p^{(n-1)}+S_{p-1}^{(n-2)}c_n \tag{10}$$

A l'aide de cette relation on vérifie aisément que les expressions (9) satisfont l'équation de récurrence

$$y_n(z)=zy_{n-1}(z)+c_{n-1}y_{n-2}(z) \tag{11}$$

Or celle-ci n'est autre que l'équation de récurrence bien connue des dénominateurs des réduites de F.

On sait d'autre part [1] que les polynômes $P_n(z)$ sont orthogonaux par rapport à la suite des nombres $s_0, 0, s_1, 0, s_2, 0, \cdots$: Définissant la fonctionnelle $\mathscr{F}$ dans l'espace de tous les polynômes par

$$\mathscr{F}\{R(z)\}=a_0s_0-a_2s_1+a_4s_2+\cdots+(-1)^n a_{2n}s_n \tag{12}$$

où $R(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots+a_{2n}z^{2n}$ est un polynôme arbitraire, on a:

$$\mathscr{F}\{P_m(z)P_n(z)\}=0 \quad \text{si} \quad m\neq n \tag{13}$$

$$\mathscr{F}\{P_n(z)P_n(z)\}=\mathscr{F}\{P_n(z)z^n\}=c_nc_{n-1}\cdots c_1 \tag{14}$$

En portant dans (14) les expressions (9), il vient:

$$\prod_{i=1}^{2n}c_i=s_{2n}-S_1^{(2n-1)}s_{2n-1}+\cdots +(-1)^pS_p^{(2n-1)}s_{2n-p}+\cdots+(-1)^nS_n^{(2n-1)}s_n \tag{15}$$

$$\prod_{i=1}^{2n-1}c_i=s_{2n-1}-S_1^{(2n-2)}s_{2n-2}+\cdots +(-1)^pS_p^{(2n-2)}s_{2n-1-p}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}^{(2n-2)}s_n \tag{16}$$

Les équations (15) et (16) constituent un système d'équations linéaires par rapport aux variables s_j, dont les coefficients ne dépendent que des nombres c_k. Sa résolution donne:

$$s_{2n}=\begin{vmatrix}
\prod_{i=1}^{2n}c_i & -S_1^{(2n-1)} & S_2^{(2n-1)}\cdots(-1)^nS_n^{(2n-1)} & 0 & \cdots 0 & 0\\
\prod_{i=1}^{2n-1}c_i & 1 & -S_1^{(2n-2)}\cdots(-1)^{n-1}S_{n-1}^{(2n-2)} & 0 & \cdots 0 & 0\\
\prod_{i=1}^{2n-2}c_1 & 0 & 1 \quad \cdots(-1)^{n-2}S_{n-2}^{(2n-3)} & (-1)^{n-1}S_{n-1}^{(2n-3)} & \cdots 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
c_2c_1 & 0 & 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots 1 & -c_1\\
c_1 & 0 & 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots 0 & 1
\end{vmatrix} \tag{17}$$

$$s_{2n-1}=\begin{vmatrix}
\prod_{i=1}^{2n-1}c_i & -S_1^{(2n-2)} & S_2^{(2n-2)}\cdots(-1)^{n-1}S_{n-1}^{(2n-2)} & 0 & \cdots 0 & 0\\
\prod_{i=1}^{2n-2}c_i & 1 & -S_1^{(2n-3)}\cdots(-1)^{n-2}S_{n-2}^{(2n-3)} & (-1)^{n-1}S_{n-1}^{(2n-3)} & \cdots 0 & 0\\
\prod_{i=1}^{2n-3}c_i & 0 & 1 \quad \cdots(-1)^{n-3}S_{n-3}^{(2n-4)} & (-1)^{n-2}S_{n-2}^{(2n-4)} & \cdots 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
c_2c_1 & 0 & 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots 1 & -c_1\\
c_1 & 0 & 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots 0 & 1
\end{vmatrix} \tag{18}$$

Les formules (17) et (18) présentent sur les formules (6) et (7) le premier avantage de ne pas être des formules de récurrence: telles les expressions (5), elles donnent les coefficients de la série S en fonction de ceux de la fraction continue F sous forme de déterminants. Mais l'avantage principal des expressions (17) et (18) est que les coefficients s_n sont exprimés en fonction des sommes $S_p^{(n)}$, qui sont des quantités faciles à former. Alors que la possibilité d'utiliser les équations (14) avait été entrevue par Wall [1], l'introduction systématique des sommes $S_p^{(n)}$ est, à notre connaissance, nouvelle. Ajoutons que ces sommes, ainsi que les expressions (9) des polynômes $P_n(z)$, peuvent être utiles dans d'autres problèmes que celui du développement en série de la fraction continue (2).

Pour illustrer ces formules, nous allons les appliquer à l'exemple suivant. On sait [1], [5] que la fonction

$$G(z)=\frac{2}{1-t+(1+t)(1+4z)^{1/2}} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1) \tag{19}$$

peut être développée en la fraction continue

$$F(z)=\cfrac{1}{1+\cfrac{(1+t)z}{1+\cfrac{z}{1+\cfrac{z}{1+\cdots}}}} \tag{20}$$

pour tout point du plan complexe z extérieur au segment de l'axe réel $(-\infty, -1/4)$. Son développement en série des puissances croissantes de z est obtenu dans la théorie d'une méthode de sommation basée sur un algorithme de Schur [5]. Les coefficients, qui se trouvent être les moments

$$s_n=(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{\pi}\int_0^1 u^n\frac{1+t}{(1+t)^2-4tu}\left(\frac{1}{u}-1\right)^{1/2}du \quad (0\leqslant t\leqslant 1), \tag{21}$$

de sorte que

$$G(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{1+t}{(1+t)^2-4tu}\left(\frac{1}{u}-1\right)^{1/2}\frac{1}{1+4zu}du \quad (0\leqslant t\leqslant 1), \tag{22}$$

apparaissent alors sous la forme de polynômes du paramètre t:

$$s_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{2p+1}{n+p+1}\binom{2n}{n-p}t^p \tag{23}$$

Notons que la fonction $G(z)$ est représentée par la série $\sum_{n=0}^{\infty}s_n z^n$ pour toute valeur de z telle que $|z|<1/4$.

Il est aussi possible d' obtenir les coefficients s_n par la méthode que nous venons de décrire, à partir de la fraction continue (20): ils apparaissent alors sous une autre forme intéressante, à savoir celle de polynômes du paramètre $1+t$. En effet les coefficients c_n

ont pour valeurs $c_1=1+t$, $c_2=c_3=\cdots=c_n=\cdots=1$, et les sommes $S_p^{(n)}$ ont les expressions simples

$$S_p^{(n)}=\binom{n-p}{p-1}(1+t)+\binom{n-p}{p} \tag{24}$$

En portant ces expressions dans (17) et (18), on obtient l'expression de s_n en fonction de $1+t$. On peut montrer indirectement [6] que les déterminants obtenus peuvent encore s'écrire

$$s_n=\begin{vmatrix} 1+t & 1+t & 2(1+t) & \cdots & \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}(1+t) \\ -1 & 1+t & 1+t & \cdots & \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}(1+t) \\ 0 & -1 & 1+t & \cdots & \frac{1}{n-2}\binom{2n-6}{n-3}(1+t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+t \end{vmatrix} \tag{25}$$

ce qui donne pour le coefficient s_n l'expression cherchée

$$s_n=\sum_{p=0}^{n-2}\frac{1}{n-p}\binom{2n-2}{n-p-1}(1+t)^{p+1}+(1+t)^n \tag{26}$$

Références

[1] H. S. Wall: Analytic Theory of Continued Fractions. Van Nostrand, New York (1948).

[2] G. Frobenius and L. Stickelberger: J. für reine u. ang. Math., **88**, 146 (1880).

[3] ——: J. für reine u. ang. Math., **90**, 1 (1880).

[4] T. J. Stieltjes: Ann. Fac. Sci. Toulouse, **3**, 1 (1889); Oeuvres complètes. II. 184.

[5] W. T. Scott and H. S. Wall: Trans. Amer. Math. Soc., **51**, 255 (1942).

[6] M. Dupuis: Prog. Theor. Phys. (Kyoto), **37**, 502 (1967).