55. *Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. IV*

Von Harry POPPE
Sektion Mathematik, Ernst-Moritz Arndt Universität, D. D. R.

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., April 12, 1968)

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung der Note "Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà III" aus dem gleichen Band dieser Proceedings.

Wir können nun den Nobelschen Satz (5) (bzw. die brieflich mitgeteilte Verschärfung teilweise) weitgehend verallgemeinern.

(6) Satz: Y und Z seien L-Räume, Z erfülle noch das Axiom L III und sei Hausdorffsch (d.h. Z erfüllt das Axiom LT_2 im Sinne von [8]). Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(I) Es sei lim eine Limesabbildung für $C(Y, Z)$, die größer als die Limesabbildung p-lim (siehe [8]) der punktweisen Konvergenz ist (d.h. aus der Konvergenz bezüglich lim folgt die Konvergenz bezüglich p-lim). Es sei $(C(Y, Z), \lim)$ ein L-Raum. Ist dann $H \subset C(Y, Z)$ bezüglich lim kompakt (d.h. konvergiert jeder Ultrafilter $\mathfrak{F}$ in $C(Y, Z)$ mit $H \in \mathfrak{F}$ gegen ein $f \in H$), so folgt, daß H gleichstetig ist (d.h. es gilt folgendes: ist $y \in Y$, $z \in Z$, ϕ ein Filter in Y mit $\phi \to y$ und $\mathfrak{F}$ ein Filter in $C(Y, Z)$ mit $H \in \mathfrak{F}$ und $\omega(\mathfrak{F} \times \varphi y) \to z$, so folgt $\omega(\mathfrak{F} \times \phi) \to z$[1].

(II) Für jeden L-Raum X mit der Eigenschaft, daß jeder konvergente Ultrafilter in X eine kompakte Menge enthält, gilt: Ist $\tilde{f} \in C(X, (C(Y, Z), \lim))$, so folgt $f = h^{-1}(\tilde{f}) \in C(X \times Y, Z)$. (Es ist $f(x, y) = \tilde{f}(x)(y)$).

Beweis: (I)$\Rightarrow$(II): Sei $\tilde{f} \in C(X, (C(Y, Z), \lim))$ und $f = h^{-1}(f)$; es sei $(x, y) X \in \times Y$, ϕ ein Filter in $X \times Y$ mit $\phi \to (x, y)$ und π' ein Ultrafilter in Z mit $f\phi \subset \pi'$; dann existiert ein Ultrafilter π in $X \times Y$ mit $\phi \subset \pi$ und $f\pi = \pi'$; sei $\pi_1 = pr_X \pi$ und $\pi_2 = pr_Y \pi$; dann gilt $\pi_1 \to x$ und $\pi_2 \to y$; π_1 ist konvergenter Ultrafilter in X und folglich enthält π_1 eine kompakte Menge K; dann folgt, daß $\tilde{f}(K)$ kompakt in $(C(Y, Z), \lim)$ ist und folglich ist $\tilde{f}(K)$ nach Voraussetzung gleichstetig. $\tilde{f}\pi_1$ ist ein Filter in $C(Y, Z)$ mit $\tilde{f}(K) \in \tilde{f}\pi_1$; aus $\pi_1 \to x$ folgt $\tilde{f}(x) \lim \tilde{f}\pi_1$ und damit auch $f(x)$ p-lim $\tilde{f}\pi_1$ folglich gilt $\omega(\tilde{f}\pi_1 \times \varphi y) \to \tilde{f}(x)(y) = f(x, y)$; wegen der Gleichstetigkeit von $\tilde{f}(K)$ und wegen $\pi_2 \to y$ folgt dann $\omega(\tilde{f}\pi_1 \times \pi_2) \to f(x, y)$. Wir zeigen noch, daß $\omega(\tilde{f}\pi_1 \times \pi_2) \subset f\pi = \pi'$ gilt,

1) In [8] wurde eine etwas stärkere Bedingung angegeben; in [9] wurde die vorliegende Bedingung als "schwache Gleichstetigkeit" bezeichnet.

woraus $\pi' \to f(x,y)$ folgt und damit auch $f\phi \to f(x,y)$, da Y ein L^*-Raum ist: sei $\omega(A \times V) \in \omega(f\pi_1 \times \pi_2)$, also $A \in \mathring{f}\pi_1$ und $V \in \pi_2$; wegen $A \in \mathring{f}\pi_1$ existiert ein $P \in \pi_1$ mit $\mathring{f}(P) \subset A$; wegen $f = h^{-1}(\mathring{f})$ gilt $\omega(\mathring{f}(P) \times V) = f(P \times V)$; es ist jedoch $\pi_1 \times \pi_2 = pr_1\pi_1 \times pr_2\pi_2 \subset \pi$, woraus $f(P \times V) f\pi$ folgt; wegen $f(P \times V) = \omega(\mathring{f}(P) \times V) \subset \omega(A \times V)$ folgt dann $\omega(A \times V) \in f\pi$.

(II)$\Rightarrow$(I):

a) Aus (II) ergibt sich zunächst folgendes: Es sei $H \subset C(Y, Z)$ und H sei bezüglich lim kompakt. Dann ist die Einschränkung von ω auf $H \times Y$, $\omega : H \times Y \to Z$, stetig.

Beweis[1]: Es sei $\tilde{\imath}$ die identische Abbildung von H in $C(Y, Z)$; dann gilt $\tilde{\imath} \in C((H, \lim), (C(Y, Z), \lim))$; nach (II) folgt $h^{-1}(\tilde{\imath}) \in C((H, \lim) \times Y, Z)$; es ist $h^{-1}(\tilde{\imath})(f, y) = \tilde{\imath}(f)(y) = f(y) = \omega(f, y)$.

b) (I) folgt nun aus a) der folgenden allgemeinen Aussage:

(7) Y, Z seien L-Räume, Z erfülle die Axiome L III und LT_2; es sei $H \subset C(Y, Z)$; lim sei eine Limesabbildung für $C(Y, Z)$[2]; es gelte: 1) H ist bezüglich lim kompakt, 2) $\omega : (H, \lim) \times Y \to Z$ ist stetig. Dann ist H gleichstetig.[3]

Beweis: Es sei $y \in Y$, $z \in Z$, $\mathfrak{F}$ ein Filter in $C(Y, Z)$ mit $H \in \mathfrak{F}$ und $\omega(\mathfrak{F} \times \varphi y) \to z$ und ϕ ein Filter in Y mit $\phi \to y$; es ist zu zeigen: $\omega(\mathfrak{F} \times \phi) \to z$; wegen L III genügt es zu zeigen, daß jeder Ultrafilter π' in Z mit $\omega(\mathfrak{F} \times \phi) \subset \pi'$ gegen z konvergiert. Zu π' gibt es dann einen Ultrafilter ρ in $C(Y, Z) \times Y$ mit $\mathfrak{F} \times \phi \subset \rho$ und $\omega(\rho) = \pi'$; wir setzen zur Abkürzung $\rho_1 = pr_{C(Y,Z)}\rho$, $\rho_2 = pr_Y\rho$; ρ_1 ist dann Ultrafilter in $C(Y, Z)$ und es gilt $\mathfrak{F} \subset \rho_1$; daraus folgt $H \in \rho_1$ und $\omega(\mathfrak{F} \times \varphi y) \subset \omega(\rho_1 \times \varphi y)$ und somit gilt auch $\omega(\rho_1 \times \varphi y) \to z$. H ist bezüglich lim kompakt und folglich existiert ein $f \in H$ mit $f \in \lim \rho_1$; wegen $H \in \rho_1$ existiert die Einschränkung ρ_1^H von ρ_1 auf H und es ist $f \in \lim_H \rho_1^H$ $(= \lim \rho_1 \cap H)$; aus $f \in \lim_H \rho_1^H$ und $\phi \to y$ folgt $\rho_1^H \times \phi \to (f, y)$, woraus $\omega(\rho_1^H \times \phi) \to \omega(f, y) = f(y)$ folgt nach der Voraussetzung über ω: $\omega(\rho_1^H \times \phi)$ ist ein Filter in Z mit $\omega(\rho_1^H \times \phi) \subset \omega(\rho_1 \times \phi)$; folglich gilt $\omega(\rho_1 \times \phi) \to f(x)$; wegen $\varphi y \to y$ folgt analog $\omega(\rho_1 \times \varphi y) \to f(x)$; es gilt jedoch auch $\omega(\rho_1 \times \varphi y) \to z$ woraus wegen LT_2 $z = f(x)$ folgt; es gilt also $\omega(\rho_1 \times \phi) \to z$ und damit wegen $\phi \subset \rho_2$ auch $\omega(\rho_1 \times \rho_2) \to z$; es ist jedoch $\rho_1 \times \rho_2 \subset \rho$ und folglich gilt $\omega(\rho) = \pi' \to z$.

(7a) Bemerkung: Aus dem Beweis von (7) geht hervor, daß die Voraussetzung H $C(Y, Z)$ nicht benötigt wird. (7) gilt also für ein beliebiges H Z^Y.

Es entsteht nun die Frage, wann die Bedingung 2) in der Voraussetzung von (7) ($\omega : (H, \lim) \times Y \to Z$ ist stetig) erfüllt ist. Wir zeigen

1) Diese Schlußweie wurde auch von Noble [7] benutzt.

2) Es genügt, wenn lim für H definiert ist.

3) (7) ist eine Verallgemeinerung der in [8], S. 112 benutzten Schlußweise.

hierzu folgendes:

(8) Y, Z seien L-Räume; es sei $H \subset Z^Y$; lim sei eine Limesabbildung für H. Ist $A \subset Y$, so bezeichnen wir mit f_A die Einschränkung von $f \in Z^Y$ auf A. lim genüge folgenden Bedingungen:

(a) Ist $K \subset Y$ kompakt, so ist lim für $q_K(H)$ erklärt und die Abbildung $q_K: f \to f_K$ von $(H, \lim)$ auf $(q_K(H), \lim)$ ist stetig.

(b) Ist K kompakt in Y, so stimmen in $q_K(H)$ lim und s-lim überein.

Es sei $M \subset H \times Y$ und $pr_Y M$ sei kompakt in Y. Dann ist ω auf M stetig.

Bemerkung: Insbesondere ist also der Satz anwendbar, wenn M kompakt ist, speziell, wenn $M = H \times Y$ und Y kompakt ist.

Beweis: $\mathfrak{F}$ sei ein Filter in M mit $\mathfrak{F} \to (f, y) \in M$; es sei $\mathfrak{K} = pr_H \mathfrak{F}$ und $\phi = pr_Y \mathfrak{F}$; dann ist $\mathfrak{K}$ ein Filter in H mit $f \in \lim \mathfrak{K}$ und ϕ ein Filter in Y mit $pr_Y M \in \phi$ und $\phi \to y$; nach Voraussetzung ist $K = pr_Y M$ kompakt und es sei ϕ_1 die Einschränkung von ϕ auf K. Nach (a) und (b) gilt $q_K(f) = f_K \in \lim q_K \mathfrak{K} = s\text{-}\lim q_K \mathfrak{K}$ in $q_K(H) \subset Z^K$; wegen $\phi_1 \to y$ in K folgt nach Definition von s-lim $\omega(q_K \mathfrak{K} \times \phi_1) \to f_K(y) = f(y) = \omega(f, y)$; wegen $K \in \phi$ gilt aber $\omega(q_K \mathfrak{K} \times \phi_1) \subset \omega(q_K \mathfrak{K} \times \phi) \subset \omega(\mathfrak{F})$, also gilt auch $\omega(\mathfrak{F}) \to \omega(f, y)$, d.h. ω ist stetig auf M.

Anwendungen der Ergebnisse (6), (7), und (8) werden in der anschließenden Note "Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà V (siehe den gleichen Band dieser Proceedings) behandelt.