54. *Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. III*[*)]

Von Harry POPPE
Sektion Mathematik, Ernst-Moritz Arndt Universität, D. D. R.

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., April 12, 1968)

Die vorliegende Arbeit schließt sich unmittelbar an die Arbeiten [8] und [9], insbesondere an die Arbeit [8] an.[1] Sie enthält Verschärfungen und Verallgemeinerungen einiger Ergebnisse aus [8]. Ferner berichtigen wir einen Fehler, der in [8] bei den Betrachtungen über den Limesraum der stetigen Konvergenz aufgetreten ist. (Hilfssatz (2.4b) von [8]) Dieser Fehler hat ein weiteres unrichtiges Ergebnis zur Folge (Hilfssatz auf S. 119 bzw. Satz (3-11) von [8]: eine Aussage über die Gültigkeit des "Exponentialgesetzes für Abbildungsräume" bezüglich der compact-open-Topologie τ_c). N.L. Noble (Worcester, Mass.) machte uns liebenswürdigerweise in einem Brief darauf aufmerksam. In diesem Zusammenhang hat Noble [7] ein Ergebnis erhalten, das wir hier verschärfen und verallgemeinern können.

Wir verwenden im folgenden die in [8] und [9] benutzten Bezeichnungen und Begriffe. Zur Bequemlichkeit der Leser stellen wir jedoch die wichtigsten Begriffe noch einmal kurz zusammen. Unter einem allgemeinen Limesraum X verstehen wir eine Menge X, in der auf irgendeine Weise jedem eigentlichen Filter ϕ aus X eine Teilmenge von X, die Menge der Limespunkte von ϕ, zugeordnet wird: $\phi \to \lim \phi \subset X$. Ist $x \in \lim \phi$, so schreiben wir auch $\phi \to x$ und ϕ heißt konvergent gegen x. Für diese Limesabbildung lim betrachten wir die folgenden Axiome:

L I: Ist $x \in X$, so gilt für den von $\{x\}$ erzeugten Filter φx

$$x \in \lim \varphi x.$$

L II: Aus $\phi \subset \phi_1$ und $x \in \lim \phi$ folgt $x \in \lim \phi_1$.

Einen allgemeinen Limesraum, der die Axiome L I und L II erfüllt, bezeichnen wir kurz als L-Raum. Für L-Räume betrachten noch die Axiome:

L III: Ist ϕ ein Filter in X und gilt für jeden Ultrafilter

$$\pi \supset \phi \pi \to x, \quad \text{so folgt} \quad \phi \to x.$$

---

*) Für die Bezeichnungen vgl. Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. I, Math. Nachr., **30**, 87-122 (1965), II, Monatsberichte der Deutschen Akad. der Wiss. zu Berlin, **8**, 259-264 (1966).

1) Die Literatur befindet sich am Schluss der "VI".

L IV: Für x X gilt $\mathfrak{A}(x)=\bigcap\{\phi:\phi\to x\}=\bigcap\{\pi:\pi$ Ultrafilter in X und $\pi\to x\}\to x$.

L V: Es existiert eine Topologie für X, deren Konvergenz mit der gegebenen Konvergenz lim übereinstimmt.

L-Räume, für die L III bzw. L IV gilt, nennen wir L^*-Räume bzw. U-Räume; L-Räume, für die L V gilt, sind mit topologischen Räumen identisch. Bezüglich Aussagen über Limesräume vergleiche man [8] oder die dort zitierte Literatur über Limesräume. Der Einfachheit halber legen wir hier L-Räume zugrunde; allgemeine Limesräume werden in [8] betrachtet.

Sind X und Y Mengen, so bezeichnen wir mit Y^X die Produktmenge, d.h. die Menge aller Abbildungen von X in Y; sind X, Y L-Räume (allgemeine Limesräume), so sei $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X in Y. Für zwei Mengen X, Y bezeichnen wir mit die Abbildung

$$\omega:\omega(f, x)=f(x)$$

von $Y^X\times X$ in Y (evaluation map); für einen Filter $\mathfrak{F}$ aus Y^X und einen Filter ϕ aus X sei $\mathfrak{F}\times\phi$ der Filter in $Y^X\times X$ mit der Basis $\{A\times V: A\in\mathfrak{F}$ und $V\in\phi\}$ (kartesisches Produkt der Filter $\mathfrak{F}$ und ϕ).

Sind nun X, Y L-Räume und ist $\mathfrak{F}$ ein Filter in Y^X, so heißt $\mathfrak{F}$ stetig konvergent gegen $f\in Y^X$, wenn gilt:

Für jedes $x\in X$ und jeden Filter ϕ in X folgt aus $\phi\to x$ stets $\omega(\mathfrak{F}\times\phi)\to f(x)$. ([8], Definition (2.1)). Wir schreiben dann $\mathfrak{F}\xrightarrow{s}f$ bzw. $f\in s$-lim. (Y^X, s-lim) ist dann ein allgemeiner Limesraum und ($C(X, Y)$, s-lim) ein L-Raum.

In Hilfssatz (2.4b) von [8] wurde behauptet: X und Y seien L-Räume[1]; es sei $x\in X$ und $f\in Y^X$. Dann gilt

$$\mathfrak{A}(f(x))\subset\omega(\mathfrak{A}(f)\times\mathfrak{A}(x)),$$

wobei $\mathfrak{A}(f)$ der Umgebungsfilter von f bzgl. s-lim ist. Der dort angegebene Beweis enthält jedoch einen Fehler und wir führen jetzt ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage an.

(1) Gegenbeispiel

X sei folgender nulldimensionaler Raum (siehe das Beispiel auf S. 101 von [8]): X sei die Menge der reellen Zahlen mit folgender Topologie:

Offen in X seien

1) die euklidisch-offenen Mengen, die Null enthalten,
2) alle Mengen, die Null nicht enthalten.

F sei das zusammenhängende Punktepaar $\{0, 1\}$ (mit ϕ, $\{0\}$, $\{0, 1\}$

---

1) In [8], (2.4b) waren X, Y etwas allgemeiner als allgemeine Limesräume vorausgesetzt.

als offenen Mengen); es sei $f \in C(X, Y): f(x)=\begin{cases}0, & x \in]-1, +1[\\ 1, & \text{sonst};\end{cases}$ wir bezeichnen die (euklidische) Umgebung $]-1, 1[$ von 0 in X mit U_0; U sei eine beliebige Umgebung von 0 mit $U \subset U_0$; E sei eine endliche Menge aus $U_0 - U$ (E kann auch leer sein); wir setzen $A_U^E = \{g \in C(X,F): g(x)=0$ für $x \; U \cup E\}$; offenbar gehören alle Abbildungen von X in F zu A_U^E, die auf $U \cup E$ konstant gleich Null sind und in den Punkten $y \notin U \cup E$ beliebige Werte 0 oder 1 annehmen. Wegen $f \in A_U^E$ ist jedes A_U^E nicht leer und wegen $A_U^{E_1} \cap A_U^{E_2} = A_U^{E_1 \cup E_2}$ ist die Menge $\{A_U^E: E \subset U_0 - U, E$ endlich$\}$ für jedes feste U eine Filterbasis; sei $\mathfrak{F}_U$ der von dieser Basis erzeugte Filter in $C(X, F)$; dann konvergiert $\mathfrak{F}_U$ (für jedes U) stetig gegen f:

a) für $x \notin U_0$ ist nichts zu zeigen,

b) sei $x \in U_0$: ist $x=0$, so gilt $\omega(A_U^\phi \times U) \subset \{0\}$, ist $x \neq 0$, $x \in U$, so gilt $\omega(A_U^\phi \times \{x\}) \subset \{0\}$, ist $x \in U_0 - U$, so gilt $\omega(A_U^x \times \{x\}) \subset \{0\}$.

Wir können nun zeigen, daß

$\omega(\mathfrak{A}(f) \times \mathfrak{A}(0)) = \varphi(\{0, 1\})$ gilt, wobei $\mathfrak{A}(f)$ also den Umgebungsfilter von f bezüglich stetiger Konvergenz bedeutet: sei $z \in \mathfrak{A}(f)$ und $U \in \mathfrak{A}(0)$; ist $U \not\subset U_0$, so ist $\omega(Z \times U) = \{0, 1\}$ wegen $f \in z$ (($C(X, F)$, s-lim) ist ein L-Raum und es gilt $\mathfrak{A}(f) \subset \varphi(f)$); sei $U \subset U_0$; U_1 sei eine Umgebung von 0 mit $U_1 \subsetneqq U$; wegen $f \in s\text{-lim}\, \mathfrak{F}_{U_1}$ gilt $Z \in \mathfrak{F}_{U_1}$ und folglich existiert ein endliches $E \subset U_0 - U_1$ mit $A_{U_1}^E \subset Z$; offenbar existiert ein $x_0 \in U - (U_1 \cup E)$ und ein $g \in A_{U_1}^E$ mit $g(x_0)=1$; folglich gilt $\{0, 1\} = \omega(A_{U_1}^E \times U) \subset \omega(Z \times U)$ und damit gilt $\omega(Z \times U) = \{0, 1\}$. Gilt nun $\mathfrak{A}(f(0)) \subset \omega(\mathfrak{A}(f) \times \mathfrak{A}(0)) = \varphi(\{0, 1\}) = \{\{0, 1\}\}$, so ergibt sich wegen $\mathfrak{A}(f(0)) = \mathfrak{A}(0) = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$ ein Widerspruch.

Bemerkung:

1) ($C(X, F)$, s-lim) ist also ein Beispiel eines L^*-Raumes, der kein U-Raum ist. In der Literatur gibt es bereits solche Beispiele. Für weitere Beispiele vergleiche man die Folgerung aus Satz (3).

2) Als erste Konsequenz aus dieser Berichtigung ergibt sich, daß die Aussage (2.5), e) und die entsprechende Aussage von (2.6) ("U-Raum") von [8] unrichtig sind und gestrichen werden müssen. [8], (2.7) bleibt richtig, wenn man anstelle "L ist ein L-Raum" "L ist ein U-Raum" voraussetzt.

In Analogie zu [8], (2.7) ist nun gerade die Bedingung $\mathfrak{A}(f(x)) \subset \omega(\mathfrak{A}(f) \times \mathfrak{A}(x))$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von L IV:

(2) X und Y seien U-Räume. ($C(X, Y)$, s-lim) genügt dann und nur dann L IV, wenn gilt: Für jedes $x \in X$ und jedes $f \in C(X, Y)$ gilt $\mathfrak{A}(f(x)) \subset \omega(\mathfrak{A}(f) \times \mathfrak{A}(x))$.(+)

Beweis: 1) ($C(X, Y)$, s-lim) genüge L IV; dann gilt $\mathfrak{A}(x) \rightarrow x$

und $\mathfrak{A}(f)\xrightarrow{s}f$, folglich gilt $\omega(\mathfrak{A}(f)\times\mathfrak{A}(x))\rightarrow f(x)$ und damit $\mathfrak{A}(f(x))\subset\omega(\mathfrak{A}(f)\times\mathfrak{A}(x))$.

2) Es gelte die Bedingung $(+)$; nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{A}(f(x))\rightarrow f(x)$ und nach $(+)$ somit $\omega(\mathfrak{A}(f)\times\mathfrak{A}(x))\rightarrow f(x)$, woraus $\mathfrak{A}(f)\xrightarrow{s}f$ folgt.

Wir verschärfen jetzt Satz (2.9).

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Arens und er besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen für die topologischen Räume X, Y aus der Tatsache, daß $(C(X, Y), s\text{-lim})$ das Axiom L V erfüllt (also topologisch ist) folgt, daß X lokalkompakt ist. Wir können nun zeigen, daß hierfür bereits die Voraussetzung "$(C(X, Y), s\text{-lim})$ genügt L IV" ausreicht.

(3) Satz (Verschärfung von [8], (2.9))

X und Y seien topologische Räume; X sei regulär (aber nicht notwendig Hausdorffsch); X und Y genügen folgender Bedingung:

In Y gibt es zwei Punkte a, b, $a\neq b$ mit den Eigenschaften:

1) Es gibt eine Umgebung W von a mit $b\notin W$.

2) Ist $H\subset X$, $H=\bar{H}$, und $x\in X$ mit $x\notin H$, so gibt es eine Abbildung $g\in C(X, Y)$ mit $g(y)=a$ für $y\in H$ und $g(x)=b$. Für $(C(X, Y), s\text{-lim})$ gelte das Axiom L IV. Dann ist X lokalkompakt.

Beweis[1]: f sei die konstante Abbildung von X in Y mit dem Wert a; x sei beliebig aus X; wegen der Gültigkeit von L IV folgt aus (2) $\mathfrak{A}(f(x))\subset\omega(\mathfrak{A}_s(f)\times\mathfrak{A}(x))$, wobei $\mathfrak{A}_s(f)$ der Umgebungsfilter in $C(X, Y)$ von f bezüglich s-lim ist; wegen $f(x)=a$ folgt $W\in\omega(\mathfrak{A}_s(f)\times\mathfrak{A}(x))$; d.h. es gibt ein $G\in\mathfrak{A}_s(f)$ und ein $U\in\mathfrak{A}(x)$ mit $\omega(G\times U)\subset W$. Wir zeigen, daß $\bar{U}$ kompakt ist; $\mathfrak{D}'$ sei eine offene Überdeckung von $\bar{U}$ und es sei $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}'\cup\{X-\bar{U}\}$; $\mathfrak{r}$ bezeichne das Mengensystem $\{P\subset X: P=\bar{P}$ und zu P existiert ein $D\in\mathfrak{A}$ mit $P\subset D\}$ und $\tau_{\mathfrak{r}}$ sei die Topologie für $C(X, Y)$, die eine Subbasis aus Mengen der Form $(S, V)=\{f\in C(X, Y): f(S)\subset V\}$, wobei $S\in\mathfrak{r}$ und V offen in Y ist, besitzt.[2] $\mathfrak{A}\tau_{\mathfrak{r}}(f)$ sei der Umgebungsfilter von f bezüglich $\tau_{\mathfrak{r}}$ und wir zeigen, daß $\mathfrak{A}_s(f)\subset\mathfrak{A}\tau_{\mathfrak{r}}(f)$ gilt; dazu genügt es nachzuweisen, daß für jeden Filter $\mathfrak{F}$ in $C(X, Y)$ aus $\mathfrak{F}\xrightarrow{\tau_{\mathfrak{r}}}f$ $\mathfrak{F}\xrightarrow{s}f$ folgt: man vergleiche hierzu den Beweis von (2.9 in) [8]. Aus $\mathfrak{A}_s(f)\subset\mathfrak{A}\tau_{\mathfrak{r}}(f)$ und $G\in\mathfrak{A}_s(f)$ folgt $G\in\mathfrak{A}\tau_{\mathfrak{r}}(f)$. Der weitere Beweis verläuft nun wörtlich so wie in [8], (2.9).

(4) Folgerung: X sei ein vollständig regulärer topologischer Raum. Ist X nicht lokalkompakt, so kann $C(X)=C(X, R)$ bezüglich s-lim nicht das Axiom L IV erfüllen.

1) Dieser Beweis ist nur eine leichte Modifikation des Beweises aus [8], der sich wiederum an den Arensschen Beweis anlehnt (man vergleiche dazu [1]).

2) Solche Topologien werden bei Arens und Dugundji [1] als σ–Topologien bezeichnet.

Als weitere Konsequenz aus dem Gegenbeispiel (1) müssen wir noch den Hilfssatz auf S. 119 von [8] und den mit Hilfe dieses Hilfssatzes bewiesenen Satz (3.11) von [8] berichtigen (man vergleiche die Einleitung dieser Arbeit). Wir verwenden die in [8] benutzten Bezeichnungen: X, Y, Z seien Mengen, f sei eine Abbildung von $X \times Y$ in Z; dann bezeichne $f(x, \cdot)$ die Einschränkung von f auf $\{x\} \times Y$, $\tilde{f}$ die Abbildung $x \to f(x, \cdot)$ von X in Z^Y und schließlich h die Abbildung $f \to \tilde{f}$.

Dann ist h bekanntlich eine eineindeutige Abbildung von $Z^{X \times Y}$ auf $(Z^Y)^X$. Man bezeichnet h oft als Exponentialabbildung. Sind X, Y, Z L-Räume und ist $X \times Y$ das kartesische Produkt der L-Räume X und Y (siehe [8]), so gilt nach [8], (2.17)

$$h(C(X \times Y, Z)) \subset C(X, (C(Y, Z), s\text{-lim})).$$

Sind also X, Y, Z insbesondere topologische Räume, so gilt auch

$$h(C(X \times Y, Z)) \subset C(X, (C(Y, Z), \tau_c)),$$

da aus der stetigen Konvergenz die Konvergenz bezüglich τ_c folgt.

In [8], Satz (3.11) wird dann behauptet: X, Y seien Hausdorffsch, Z sei regulär, X genüge der Bedingung von Arens (siehe [8], S. 119) und Y sei ein k-Raum. Dann gilt $h(C(X \times Y), Z)) = C(X, (C(Y, Z,) \tau_c))$. Diese Aussage gilt jedoch nur, wenn man noch zusätzlich voraussetzt, daß $(C(Y, Z), s\text{-lim})$ das Axiom L IV erfüllt. Entsprechend muß man im Hilfssatz auf S. 119 diese Voraussetzung machen. Wegen Satz (3) wird durch diese Voraussetzung die Aussagekraft von (3.11) recht eingeschränkt.

Bemerkung: In einem Brief hatte uns N.L. Noble freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß (3.11) nicht gelten kann und ein Gegenbeispiel dazu angegeben (siehe [7], S. 38 und 39). Es stellte sich dann heraus, daß der Fehler darin lag, daß $(C(Y, Z), s\text{-lim})$ nicht immer das Axiom L IV erfüllt. (Man vergleiche den Beweis des Hilfssatzes auf S. 119 von [8]). In diesem Zusammenhang hat Noble ([7], S. 49) folgenden Satz bewiesen:

(5) Sats (Noble): Y und Z seien Hausdorffsche topologische Räume, Z sei regulär. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(I) $H \subset C(Y, Z)$ ist dann und nur dann bezüglich τ_c kompakt, wenn gilt:

(a) H ist abgeschlossen bezüglich τ_c in $C(Y, Z)$,

(b) $\overline{H(y)}$ ist kompakt für jedes $y \in Y$,

(c) H ist gleichstetig (evenly continuous).

(II) Für jeden kompakten Hausdorffschen Raum X gilt

$$h(C(X, Y, Z)) = C(X, (C(Y, Z), \tau_c))$$

Bemerkung:

1) (I) besagt die Gültigkeit des Satzes von Ascoli und Arzelà in der topologischen Form nach J.L. Kelley und A.P. Morse (siehe [6]). Man vergleiche hierzu [8], [9], und [10], insbesondere [8] und [9] wegen der Definition und Verallgemeinerung des Begriffs der Gleichstetigkeit.

2) In einem Brief vom 17. Mai 1967 teilte uns N. L. Noble ohne Beweis eine Verschärfung von (5) mit: Y wurde als beliebiger topologischer Raum vorausgesetzt und τ_c durch eine beliebige Topologie τ für $C(Y, Z)$, die größer als die Topologie der punktweisen Konvergenz (Produkttopologie) τ_p (also $\tau_p \subset \tau_c$) ist, ersetzt. Nach unserer Meinung scheint hierfür jedoch die Aussage: Aus (II) folgt (Gelten für τ die Bedingungen (a), (b), (c) von (I), so folgt, daß H bezüglich τ kompakt ist) nicht mehr richtig zu sein.