151. *Ueber einen Differentialoperator in der Algebra der komplexen 4-Matrizen*

Von Josef WEIER

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Sept. 12, 1968)

Sei Δ der unten erklärte Kählersche Differentialoperator. Sei $(\gamma_1, \cdots, \gamma_4)$ ein Quadrupel von Diracmatrizen. *Wie kommutieren die γ_ν mit dem Kählerschen Differentialoperator:*

$$\Delta\gamma_\nu - \gamma_\nu\Delta = ?$$

Mit dieser Frage befasst sich diese Arbeit. Es wird gezeigt, dass bei passender Wahl der Diracquadrupels gilt:

$$\begin{aligned}&(\gamma_\nu\Delta - \Delta\gamma_\nu)s\\ &= e_\nu \wedge \operatorname{div} s + \operatorname{div}(e_\nu \wedge s) - \operatorname{rot}(e_\nu \cdot s) &&\text{für } \nu = 1, 2,\\ &= ie_{\nu-1} \wedge \operatorname{div} s + i \operatorname{div}(e_{\nu-1} \wedge s) + i \operatorname{rot}(e_{\nu-1} \cdot s) &&\text{für } \nu = 3, 4.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet C_2 den komplexen 2-Raum, es ist e_j für $j=1, 2$ der Vektor (δ_j^1, δ_j^2) aus C_2, und s ist eine komplexe 2-Form über C_2.

Sei V der von den Tensoren $1, e_1, e_2$, und $e_1 \wedge e_2$ aufgespannte 4-dimensionale lineare Raum über den komplexen Zahlen. Dann kann man offenbar annehmen, wie es unten geschieht, dass die γ_ν Selbstabbildungen von V sind. Für jedes Elements ω aus V sei

$$\begin{aligned}\beta_1(\omega) &= e_1 \wedge \omega + e_1 \cdot \omega, & \beta_2(\omega) &= e_2 \wedge \omega + e_2 \cdot \omega,\\ \beta_3(\omega) &= i(e_1 \wedge \omega - e_1 \cdot \omega), & \beta_4(\omega) &= i(e_2 \wedge \omega - e_1 \cdot \omega).\end{aligned}$$

Wie man sich leicht überlegt, gilt $\beta_\lambda\beta_\mu + \beta_\mu\beta_\lambda = 2\delta_{\lambda\mu}$. Man Kann also die γ_ν durch die β_ν realisieren.

Es bezeichne E_n den rellen n-Zahlenraum. In einem gradlinigen koordinatensysteme von E_n sei $t = t_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r}$ eine Differentialform über E_n. Mit

$$d_k t = (\partial_k t_{\lambda_1 \cdots \lambda_r}) dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r}$$

kann man das Differential dt von t auch als $dt = dx^k \wedge d_k t$ schreiben. Mit dem im ersten Abschnitt erklärten Cliffordprodukt $\vee$ bestimmt dann

$$\Delta t = dx^k \vee d_k t$$

den Kählerschen Differentialoperator Δ. In [1] und [2] ist dieser Operator für Aggregate erklärt, die wesentlich allgemeiner als Differentialformen sind. Ersetzt man E_n durch C_2, so änder sich an den vorstehen den Erklärungen nichts wesentlich. Im Literaturverzeichnis ist noch eine Arbeit von Uhlmann angegeben, die sich methodisch mit den folgenden Untersuchungen berührt.

1. Das Cliffordprodukt schiefsymmetrischer Tensoren. Sei e_j

der kontravariante Vektor $(\delta_j^1, \cdots, \delta_j^n)$ in E_n. Wie üblich bezeichnet $e_{\lambda_1}\otimes \cdots \otimes e_{\lambda_r}$ den kontravarianten Tensor, dessen $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$-Komponente gleich $\delta_{\lambda_1}^{\alpha_1} \cdots \delta_{\lambda_r}^{\alpha_r}$ ist. Es ist

$$(1) \qquad e_{\lambda_1}\wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r} = \delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_r}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_r}$$

eine mögliche Definitionsgleichung für $e_{\lambda_1}\wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}$.

Zur Definition des Skalarproduktes von Tensoren sei zunächst

$$(2) \qquad e_\mu \cdot (e_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_r}) = \delta_{\mu\lambda_1} e_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_r}.$$

Dann ist

$$e_{\lambda_1} \cdot (e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}) = e_{\lambda_2} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}.$$

In der Tat, die linke Seite ist gleich

$$\begin{aligned} e_{\lambda_1} \cdot (\delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_r}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_r}) &= \delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_r}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} \delta_{\lambda_1 \alpha_1} e_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_r} \\ &= \delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_r}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} e_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_r} = e_{\lambda_2} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}. \end{aligned}$$

Kommt μ unter den λ_ν nicht vor, so ist

$$e_\mu \cdot (e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}) = 0.$$

Ist $\mu = \lambda_j$, so ist

$$(3) \qquad e_\mu \cdot (e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}) = (-1)^{j-1} e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{\lambda_j} \cdots \wedge e_{\lambda_r}.$$

Zur Definition des mit $\vee$ bezeichneten Cliffordproduktes setzen wir zunächst

$$(4) \qquad e_{\lambda_1} \vee \cdots \vee e_{\lambda_r} = e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r},$$

falls die λ_ν paarweis verschieden sind. Sind die λ_ν nicht paarweis verschieden, so entferne man aus $e_{\lambda_1} \vee \cdots \vee e_{\lambda_r}$ zunächst die Paare gleicher e's mit Hilfe der Vertauschungsrelation

$$(5) \qquad e_j \vee e_k + e_k \vee e_j = 2\delta_{jk}$$

Ist t ein nullstufiger Tensor, so setzen wir

$$(6) \qquad t \vee e_j = e_j \vee t = te.$$

Zu der durch (4) bis (6) bestimmten Definition des Cliffordproduktes ist die durch (7) bis (9) bestimmte äquivalent. Zunächst ist

$$(7) \qquad e_j \vee t = e_j \wedge t + e_j \cdot t,$$

wobei t eine Stufenzahl ≥ 1 habe. Bei paarweis verschiedenen λ_ν ist hierauf

$$(8) \qquad (e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}) \vee t = (e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_{r-1}}) \vee (e_{\lambda_r} \vee t).$$

Da $t_r = e_{\lambda_r} \vee t$ bereits durch (7) definiert ist, genügt es, den Ausdruck $(e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_{r-1}}) \vee t_r$ zu erklären. Nach (8) ist

$$(e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_{r-1}}) \vee t_r = (e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_{r-1}}) \vee (e_{\lambda_{r-1}} \vee t).$$

Dabei ist wieder $t_{r-1} = e_{\lambda_{r-1}} \vee t_r$ wegen (7) definiert. So fortfahrend gelangt man zu $e_{\lambda_1} \vee t_1$. Die Gleichung (9) möge mit (6) übereinstimmen.

Aus (4) bis (6) ergibt sich (7) wie folgt. Man kann

$$t = e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_s}$$

annehmen. Kommt erstens j unter den μ_ν nicht vor, so ist $e_j \cdot t = 0$ und also (7) nach (4) richtig. Wenn zweitens $j = \mu_k$, so ist $e_j \wedge t = 0$ und

$$e_j \cdot t = (-1)^{\mu_k - 1} \quad e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \cdots \wedge e_{\mu_s},$$

daher (7) nach (4) und (5) gleichfalls richtig.

Beweis von (8). Da die λ_ν paarweis verschieden, ist

$$e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r} = e_{\lambda_1} \vee \cdots \vee e_{\lambda_r}.$$

Ist $t = e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_s}$ mit paarweis verschiedenen μ_ν, so ist

$$t = e_{\mu_1} \vee \cdots \vee e_{\mu_s},$$

also

$$(e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}) \vee t = (e_{\lambda_1} \vee \cdots \vee e_{\lambda_r}) \vee (e_{\mu_1} \vee \cdots \vee e_{\mu_s}).$$

Aus (4) bis (6) folgt leicht die Assoziativität des Cliffordproduktes. Auf der rechten Seite der letzten Gleichung darf man also die Klammern versetzen:

$$\begin{aligned}(e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}) \vee t &= (e_{\lambda_1} \vee \cdots \vee e_{\lambda_{r-1}}) \vee (e_{\lambda_r} \vee (e_{\mu_1} \vee \cdots \vee e_{\mu_s})) \\ &= (e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_{r-1}}) \vee (e_{\lambda_r} \vee t),\end{aligned}$$

wie behauptet.

2. Der Kählersche Differentialoperator. Wie oben sei e_j der kontravariante Vektor $(\delta_j^1, \cdots, \delta_j^n)$ im reellen n-Zahlenraume E_n. Es bezeichne $e^j = dx^j$ den kovarianten Vektor $(\delta_1^j, \cdots, \delta_n^j)$ in E_n. Ist dann $t = t_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r}$ eine r-Form über E_n, so ist $dt = dx^h \wedge d_h t$ mit

(1) $$d_h t = (\partial_h t_{\lambda_1 \cdots \lambda_r}) dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r}.$$

Abkürzend ist $\partial_h = \partial / \partial x^h$ gesetzt. Mit

(2) $$\Delta t = dx^h \vee d_h t$$

ist hierauf Δ der Kählersche Differentialoperator für Differentialformen. Bemerkt sei nochmals, dass der Kählersche Differentialoperator für viel allgemeinere Aggregate als Differentialformen erklärt ist.

Wie oben gezeigt, ist $(\vee) = (\wedge) + (\cdot)$, also

$$\begin{aligned} dx^h \vee d_h t &= dx^h \wedge d_h t + dx^h \cdot d_h t \\ &= \operatorname{rot} t + dx^h \cdot d_h t. \end{aligned}$$

Zum Beweis von $\Delta = \operatorname{rot} + \operatorname{div}$ genügt es also zu zeigen, dass (3) gilt

Mit der in (1) erklärten Bedeutung von d_h ist

(3) $$e^h \cdot d_h t = c \operatorname{div} t,$$

wobei c ein durch r bestimmter Normierungsfaktor ist.

Beweis von (3). Dort wo im folgenden die Summenzeichen fehlen, ist entgegen der sonstigen Konvention nicht zu summieren. Dann ist

$$\sum_h e^h \cdot d_h t = \sum_h \sum_\lambda e^h \cdot \partial_h t_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} e^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e^{\lambda_r}.$$

Kommt erstens h unter den λ_ν nicht vor, so ist

$$e^h \cdot (e^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e^{\lambda_r}) = 0.$$

Zweitens sei $h = \lambda_j$. Dann ist

$$\begin{aligned} & e^h \cdot \partial_h t_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} e^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e^{\lambda_r} \\ &= \partial_h t_{\lambda_1 \cdots \lambda_{j-1} h \lambda_{j+1} \cdots \lambda_r} (-1)^{h-1} e^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}^h \wedge \cdots \wedge e^{\lambda_r} \\ &= (-1)^{h-1} \partial_h t_{\lambda_1 \cdots h \cdots \lambda_r} \sum_\alpha \delta_{\alpha_1 \cdots \cdots \alpha_{r-1}}^{\lambda_1 \cdots \hat{h} \cdots \lambda_r} e^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e^{\alpha_{r-1}} \end{aligned}$$

$$=(-1)^{r-1}\sum_{\alpha}\partial_h t_{\lambda_1\cdots\hat{h}\cdots\lambda_r h}\delta^{\lambda_1\cdots\hat{h}\cdots\lambda_r}_{\alpha_1\cdots\cdots\cdots\alpha_{r-1}}e^{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes e^{\alpha_{r-1}}$$
$$=(-1)^{r-1}\sum_{\alpha}(\partial_h t_{\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}h})e^{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes e^{\alpha_{r-1}}$$
$$=(-1)^{r-1}\sum_{\alpha}\left(\sum_{\lambda}\frac{1}{(r-1)!}\partial_h t_{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}h}\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}}_{\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}}\right)e^{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes e^{\alpha_{r-1}}$$
$$=(-1)^{r-1}\frac{1}{(r-1)!}\sum_{\lambda}\partial_h t_{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}h}(\sum_{\alpha}\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}}_{\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}}e^{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes e^{\alpha_{r-1}})$$
$$=(-1)^{r-1}\frac{1}{(r-1!)}\sum_{\lambda}\partial_h t_{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}h}e^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge e^{\lambda_{r-1}}.$$

In der letzten Summe darf über alle $(r-1)$-Tupel $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{r-1})$ summiert werden. Kommt nämlich h unter den λ_ν vor, so ist $t_{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}}h=0$. Mithin

$$\sum_{h}e^h\cdot d_h t=(-1)^{r-1}\frac{1}{(r-1!)}\sum_{\lambda}(\sum_{h}\partial_h t_{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}}h)e^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge e^{\lambda_{r-1}},$$

woraus nach der üblich Definition der Divergenz,

$$\operatorname{div} t=\sum\partial_h t_{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}h}e^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge e^{\lambda_{r-1}},$$

die Behauptung folgt.

3. Zur Vertauschung des Kählerschen Differentialoperators mit den Diracoperatoren. Wie in der Einleitung sei C_2 der komplexe 2-Raum und $e_j=(\delta^1_i, \delta^2_j)$, ferner V der von den Tensoren 1, e_1, e_2, und $e_1\wedge e_2$ aufgespannte lineare Raum. Seien $\beta_1, \cdots, \beta_4$ die in der Einleitung erklärten Operatoren, also

(1) $\beta_1(\omega)=e_1\wedge\omega+e_1\cdot\omega,\quad \beta_3(\omega)=i(e_1\wedge\omega-e_1\cdot\omega)$ usw.

Dann ist $\beta_\lambda\beta_\mu+\beta_\mu\beta_\lambda=2\delta_{\lambda\mu}$, wie im nächsten Abschnitt bewiesen wird.

Ist s eine komplexe 2-Form über C_2, so gilt

(2) $$\operatorname{div}(e_j\cdot s)=e_j\cdot\operatorname{div} s.$$

Zum Beweis von (2) seien $s^{\alpha\beta}$ die kontravarianten Komponenten von s, es seien v_α die kovarianten Komponenten von e_j. Sei $T^\nu=\sum v_\alpha s^{\alpha\nu}$. Wegen $v_\alpha=\delta^j_\alpha$ ist dann $T^\nu=s^{j\nu}$, also

$$\operatorname{div} T=\sum\partial_\nu T^\nu=\sum\partial_\nu s^{j\nu}=(\operatorname{div} s)^j.$$

Andererseits ist $T=e_j\cdot s$ und $(\operatorname{div} s)^j=e_j\cdot\operatorname{div} s$, woraus (2) folgt.

Für $v=1, 2$ ist

(3) $$\beta_\nu\operatorname{div} s-\operatorname{div}\beta_\nu s=e_\nu\wedge\operatorname{div} s+\operatorname{div}(e_\nu\wedge s).$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\beta_\nu\operatorname{div} s&=e_\nu\wedge\operatorname{div} s+e_\nu\cdot\operatorname{div} s,\\ \operatorname{div}\beta_\nu s&=\operatorname{div}(e_\nu\wedge s+e_\nu\cdot s)\\ &=\operatorname{div}(e_\nu\wedge s)+\operatorname{div}(e_\nu\cdot s),\end{aligned}$$

wegen (2) also

$$\operatorname{div}\beta_\nu s=\operatorname{div}(e_\nu\wedge s)+e_\nu\cdot\operatorname{div} s,$$

woraus (3) folgt.

Für $\nu=3, 4$ ist

(4) $$\beta_\nu\operatorname{div} s-\operatorname{div}\beta_\nu s=i[e_{\nu-1}\wedge\operatorname{div} s+\operatorname{div}(e_{\nu-1}\wedge s)].$$

Mit $\mu=\nu-2$ ist nämlich

$$\beta_\nu \operatorname{div} s = i(e_\mu \wedge \operatorname{div} s - e_\mu \cdot \operatorname{div} s)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \beta_\nu s &= \operatorname{div}(ie_\mu \wedge s - ie_\mu \cdot s) \\ &= i \operatorname{div}(e_\mu \wedge s) - i \operatorname{div}(e_\mu \cdot s) \\ &= i \operatorname{div}(e_\mu \wedge s) - i[\pm(\operatorname{rot} e_\mu)\cdot s + e_\mu \cdot \operatorname{div} s] \\ &= i \operatorname{div}(e_\mu \wedge s) - ie_\mu \cdot \operatorname{div} s, \end{aligned}$$

somit (3) richtig.

Für $\nu=1,2$ ist

$$\beta_\nu \operatorname{rot} s - \operatorname{rot} \beta_\nu s = -\operatorname{rot}(e_\nu \cdot s). \tag{5}$$

In der Tat, es ist

$$\beta_\nu \operatorname{rot} s = e_\nu \wedge \operatorname{rot} s + e_\nu \cdot \operatorname{rot} s.$$

Da rot s eine 3-Form und jede 3-Form über C_2 verschwindet, ist $\beta_\nu \operatorname{rot} s = 0$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\beta_\nu s) &= \operatorname{rot}(e_\nu \wedge s + e_\nu \cdot s) \\ &= \operatorname{rot}(e_\nu \wedge s) + \operatorname{rot}(e_\nu \cdot s). \end{aligned}$$

Da $e_\nu \wedge s$ eine 3-Form, ist wieder $e_\nu \wedge s = 0$, daher (5) richtig.

Für $\nu=3,4$ ist

$$\beta_\nu \operatorname{rot} s - \operatorname{rot} \beta_\nu s = i \operatorname{rot}(e_{\nu-1} \cdot s). \tag{6}$$

Mit $\mu=\nu-2$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \beta_\nu \operatorname{rot} s &= i(e_\mu \operatorname{rot} s - e_\mu \cdot \operatorname{rot} s) = 0, \\ \operatorname{rot} \beta_\nu s &= i \operatorname{rot}(e_\mu \wedge s) - i \operatorname{rot}(e_\mu \cdot s). \end{aligned}$$

und $e_\mu \wedge s$ verschwindet, so dass (6) richtig.

Aus $\Delta = \operatorname{rot} + \operatorname{div}$ und (3) bis (6) folgen die in der Einleitung angeführten Formeln.

Literatur

[1] Kähler, E.: Der innere Differentialkalkül. Rend. Mat. e Appl., **21**, 425–523 (1962).

[2] ——: Der innere Differentialkalkül. Abh. Math. Seminar Hamburg, **25**, 192–205 (1962).

[3] Uhlmann, A.: Gemischte Differentiale und Transformation sverhalten einiger Feldgleichungen. Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, **8**, 247–252 (1958–59).