214. *Sur une certaine classe d'opérateurs différentiels ordinaires, elliptiques et dégénérés*

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Nov. 12, 1968)

1. Opérateurs traités L et espaces de Sobolev avec poids W_k^m. Désignons par $\boldsymbol{R}^1$ et par $\boldsymbol{R}^1_+$ les ensembles des nombres réels et des nombres positifs respectivement. Leur point générique est noté par t. Soient $L^2(\boldsymbol{R}^1)$, $L^2(\boldsymbol{R}^1_+)$ et $H^r(\boldsymbol{R}^1_+)$ (r: entier $\geqq 0$) l'espace des fonctions mesurables carrés sommables sur $\boldsymbol{R}^1$, celui sur $\boldsymbol{R}^1_+$ et l'espace de Sobolev habituel d'ordre r sur $\boldsymbol{C}^1_+$ respectivement. La transformée de Fourier de $f(t) \in L^2(\boldsymbol{R}^1)$ est définie par $\mathcal{F}f(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}f(t)dt$.

Nous traitons dans ce mémoire un opérateur L de la forme

$$Lu(t) \equiv L(t\,;D_t)u(t) \equiv \sum_{h=0}^{k} P^h(D_t)\{t^{k-h}u(t)\} \tag{1}$$

sur la demi-droite $\boldsymbol{R}^1_+$, où $D_t = i^{-1}d/dt$, et

(i) *Les $P^h(D_t)$ $(0 \leqq h \leqq k)$ sont des opérateurs différentiels ordinaires d'ordre $\leqq (m-h)$ à coefficients constants complexes:*

$$P^h(D_t) = \sum_{j=0}^{m-h} p_j^h D_t^j, \quad (p_j^h \in \boldsymbol{C},\ 0 \leqq h \leqq k \text{ et } 0 \leqq j \leqq m-h) \tag{2}$$

et les k et m sont deux entiers donnés tels que

$$0 < k < m\,; \tag{3}$$

(ii) *Parmi eux, $P^0(D_t)$ est un opérateur elliptique d'ordre m avec $p_m^0 = 1$, c'est-à-dire, le polynôme $P^0(\tau)$ ne s'annule jamais sur $\boldsymbol{R}^1$.*

Soient m_+ et m_- les nombres des zéros du polynôme $P^0(\tau)$ situés dans les demi-espaces $\mathrm{Im}\tau > 0$ et $\mathrm{Im}\tau < 0$ respectivement. On a alors $m = m_+ + m_-$. Le cas où $m_+ = 0$ ou $m_- = 0$ est permis.

Nous définissons ensuite l'espace de Sobolev avec poids W_k^m sur lequel opère L. Etant donnés, en général, deux entiers λ et μ tels que $0 \leqq \mu \leqq \lambda$, nous désignons par W_μ^λ l'espace vectoriel complexe défini par

$$W_\mu^\lambda = \{u(t) \in H^{\lambda-\mu}(\boldsymbol{R}^1_+)\,;\ t^\mu u(t) \in H^\lambda(\boldsymbol{R}^1_+)\} \tag{4}$$

muni de la structure hilbertienne naturelle. Cet espace peut être identifié avec un sous-espace vectoriel de $L^2(\boldsymbol{R}^1)$ par le prolongement par 0 hors de $\boldsymbol{R}^1_+$ de chaque élément. Notons cette application: $W_\mu^\lambda \to L^2(\boldsymbol{R}^1)$ par $u(t) \to \tilde{u}(t)$. Et, si $0 < \mu \leqq \lambda$, alors l'inclusion par identification $W_\mu^\lambda \subset W_{\mu-1}^{\lambda-1}$ est continue.

Quel que soit $u(t)$ élément de W_μ^λ, il existe des valeurs suivantes qui sont majorées par la norme de $u(t)$ dans W_μ^λ:

$$\gamma_j u \equiv \lim_{t \downarrow 0} D_t^j u(t) \quad , \text{ pour } 0 \leqq j \leqq \lambda - \mu - 1, \text{ si } \lambda > \mu \text{ ; et}$$
$$\gamma_h \mathcal{F}\tilde{u} \equiv D_\tau^h \mathcal{F}\tilde{u}(\tau)|_{\tau=0}, \text{ pour } 0 \leqq h \leqq \mu - 1, \text{ si } \mu > 0.$$

Nous considérons dès maintenant l'opérateur L défini par (1) comme une application linéaire continue de W_k^m dans $W_0^0 = L^2(\boldsymbol{R}_+^1)$. Et nous notons par $u(t) \to \vec{u}$ l'application linéaire continue de W_k^m dans $\boldsymbol{C}^m$ définie par

$$\vec{u} = {}^t\{\gamma_0 u, \cdots, \gamma_{m-k-1} u, \gamma_0 \mathcal{F}\tilde{u}, \cdots, \gamma_{k-1}\mathcal{F}\tilde{u}\}. \tag{5}$$

L'opérateur L devient, par la transformation de Fourier,

$$\hat{L} \equiv \hat{L}(\tau \,; D_\tau) \equiv \sum_{h=0}^{k} P^h(\tau)(-D_\tau)^{k-h}. \tag{6}$$

Il nous convient d'introduire les polynômes $Q_q(\tau)$ d'ordre $\leqq (m-k-1-q)$:

$$Q_q(\tau) = \sum_{h=0}^{k} \sum_{j=h+q+1}^{m+h-k} h\,!\, i^{-h-1} \binom{h+q}{h} p_j^{k-h} \tau^{j-h-q-1}, \text{ pour } 0 \leqq q \leqq m-k-1. \tag{7}$$

Nous avons d'abord une formule importante (de Stokes) :

$$\hat{L}(\tau \,; D_\tau)\mathcal{F}\tilde{u}(\tau) = \mathcal{F}(Lu)^{\sim}(\tau) + \sum_{q=0}^{m-k-1} \gamma_q u \cdot Q_q(\tau), \text{ pour } u(t) \in W_k^m. \tag{8}$$

2. Position du Problème, Hypothèse et le Théorème. Soit $m_+ > 0$. Alors, on se donne de nouveau une application linéaire (c'est-à-dire, une matrice) $\mathcal{B}$ de $\boldsymbol{C}^m$ sur $\boldsymbol{C}_+^m$, et un problème se pose par le couple $\{L, \mathcal{B}\}$ comme suit :

Problème. *Etant donnés une fonction $g(t) \in L^2(\boldsymbol{R}_+^1)$ et un m_+-vecteur $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{C}_+^m$ quelconques, trouver une solution $u(t) \in W_k^m$ de l'équation*

$$(Lu)(t) = g(t) \quad \textit{et} \quad \mathcal{B}\vec{u} = \boldsymbol{b}. \tag{9}$$

(Si $m_+ = 0$, alors le problème se pose en supprimant la condition sur $\vec{u}$ dans l'équation (9)).

Cette formulation du problème est déjà classique dans la théorie des équatione elliptiques non-dégénérées comme problèmes aux limites généraux non-homogènes (voir, par exemple, [2]). Dans cette théorie classique, il s'agissait d'une condition sur $\mathcal{B}$, dite de Shapiro-Lopatinski. Pour le problème présent, nous pouvons également formuler une condition analogue que nous appelons aussi celle de Shapiro-Lopatinski. Nous allons éclaircir cette circonstance sous une condition supplémentaire sur L suivante :

Condition. *Les zéros $\{\rho_j\}_{j=1}^k$ du polynôme*

$$\Phi_0(\rho) \equiv \sum_{h=0}^{k} p_{m+h-k}^{k-h} i^h \rho(\rho-1)\cdots(\rho-h+1) \tag{10}$$

vérifient les trois hypothèses qui suivent :

(1°) *Aucun d'eux ne soit entier,*

(2°) *Aucune des différences $\rho_l - \rho_j$ $(1 \leqq l < j \leqq k)$ ne soit entier,*

(3°) *Les parties réelles des ρ_j soient toutes $< (k - m - \frac{1}{2})$.*

Sous cette Condition sur L, il existe une matrice carrée $\mathcal{R}$ d'ordre m $(\mathcal{R} : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^m)$ déterminée par L. $\mathcal{R}$ est une projection $(\mathcal{R}^2 = \mathcal{R})$ du rang m_+ dont nous expliciterons la construction. Alors, nous définissons une condition sur $\mathscr{B}$ en utilisant cette $\mathscr{R}$:

Condition de Shapiro-Lopatinski sur $\mathscr{B}$: Il existe une application linéaire (c'est-à-dire, une matrice) $\mathscr{D}: \boldsymbol{C}_+^m \to \boldsymbol{C}^m$ telle que

(α) *$\mathscr{B}\mathscr{D}=$l'identité sur $\boldsymbol{C}_+^m$, et que,* (β) *$\mathscr{R}\mathscr{D}=\mathscr{D}$.*

Cela posé, nous énonçons le théorème d'existence et d'unicité :

Théorème. *Sous la Condition sur L ci-dessus, l'application $u(t) \to \{Lu(t), \mathscr{B}\vec{u}\}$ est un isomorphisme de W_k^m sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^1) \times \boldsymbol{C}_+^m$, si la matrice $\mathscr{B}$ satisfait à la Condition de Shapiro-Lopatinski.* (Si $m_+=0$, alors nous avons l'isomorphisme L de W_k^m sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^1)$).

3. Constructions essentielles et l'esquisse de la preuve. Soit σ un paramètre réel. Désignons par $\{\hat{\xi}_l(\tau, \sigma)\}_{l=1}^k$ le système des solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{L}(\tau\,; D_\tau)\hat{\xi}_l(\tau, \sigma)=0, \text{ pour } \tau \in \boldsymbol{R}^1, \\ D_\tau^{j-1}\hat{\xi}_l(\tau, \sigma)|_{\tau=\sigma}=\delta_l^j(1 \leqq j \leqq k) \end{array} \right\}, \text{ pour } 1 \leqq l \leqq k. \tag{11}$$

Ensuite, étant donnée une fonction $\varphi(\tau)$ (polynôme ou de classe $L^2(\boldsymbol{R}^1)$), notons par $\hat{E}\varphi(\tau)$ la solution unique de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{L}(\tau\,; D_\tau)(\hat{E}\varphi)(\tau)=\varphi(\tau), \text{ pour } \tau \in \boldsymbol{R}^1, \\ D_\tau^{j-1}(\hat{E}\varphi)(0)=0, \text{ pour } 1 \leqq j \leqq k. \end{array} \right\} \tag{12}$$

Nous posons encore

$$\hat{U}_l(\tau)=\left\{ \begin{array}{ll} \hat{E}Q_{l-1}(\tau), & \text{si } 1 \leqq l \leqq m-k, \\ \hat{\xi}_{l+k-m}(\tau, 0), & \text{si } m-k+1 \leqq l \leqq m. \end{array} \right\} \tag{13}$$

Et nous définissons enfin une fonction $\hat{\mathscr{U}}(\tau\,; \vec{F})$ dépendante linéairement à un m-vecteur $\vec{F} \in \boldsymbol{C}^m$ en posant

$$\hat{\mathscr{U}}(\tau\,; \vec{F})=\sum_{l=1}^m F_l \hat{U}_l(\tau), \text{ pour } \vec{F}={}^t\{F_1, \cdots, F_m\} \in \boldsymbol{C}^m \text{ quelconque.} \tag{14}$$

Alors, nous avons, de la formula de Stokes (8),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{F}\tilde{u}(\tau)=\hat{E}\{\mathscr{F}(Lu)^\sim\}(\tau)+\hat{\mathscr{U}}(\tau\,; \vec{u}), \text{ ou encore} \\ \tilde{u}(t)=E((Lu)^\sim)(t)+\mathscr{U}(t\,; \vec{u}), \end{array} \right\}, \text{ pour } u(t) \in W_k^m, \tag{15}$$

où

$$E=\mathscr{F}^{-1}\hat{E}\mathscr{F}, \quad \text{et} \quad \mathscr{U}(t\,; \vec{F})=\mathscr{F}^{-1}_{\tau\to t}[\hat{\mathscr{U}}(\tau\,; \vec{F})]. \tag{16}$$

La Condition sur L dans le paragraphe 2 nous donne des estimations importantes des $\hat{U}_l(\tau)$ et de leurs dérivées lorsque τ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Et celles-ci impliquent les Propositions 1 et 2 suivantes :

Proposition 1. *L'application: $\vec{F} \to \mathscr{U}_+(t\,; \vec{F})$ est linéaire et continue de $\boldsymbol{C}^m$ dans W_k^m.*

Proposition 2. *L'application: $g(t) \to (E\tilde{g})_+(t)$ est linéaire et continue de $L^2(\boldsymbol{R}_+^1)$ dans W_k^m.*

Dans ces Propositions, la fonction $f_+(t)$ désigne, en général, la restriction sur $\boldsymbol{R}_+^1$ d'une fonction $f(t)$ définie sur $\boldsymbol{R}_+^1$. Nous écrivons aussi par $f_+(t)$ son prolongement par 0 hors de $\boldsymbol{R}_+^1$ qui a été écrite comme $(f_+(t))^\sim$.

Grâce à ces Propositions, nous pouvons définir enfin la matrice $\mathscr{R}$ en posant

$$\mathscr{R}\vec{F}=(\mathcal{U}_+(\cdot\,;\vec{F}))^{\to},\ \text{pour } \vec{F}\in \boldsymbol{C}^m \text{ quelconque.} \tag{17}$$

Et nous pouvons appliquer la formule (15) à $u(t)=\mathcal{U}_+(t;\vec{F})$. Nous avons

$$\mathcal{U}_+(t;\vec{F})=\mathcal{U}(t;\mathscr{R}\vec{F})=\mathcal{U}_+(t;\mathscr{R}\vec{F}),\ \text{pour tout } \vec{F}\in \boldsymbol{C}^m, \tag{18}$$

en tenant compte de l'équation

$$(L\mathcal{U})_+(t;\vec{F})=0,\ \text{pour tout } \vec{F}\in \boldsymbol{C}^m. \tag{19}$$

D'où l'on voit que $\mathscr{R}$ est une projection. Pour savoir son rang, nous avons d'abord besoin d'un lemme suivant:

Lemme. *Etant donné un $\vec{F}\in \boldsymbol{C}^m$, supposons que l'on ait $\mathcal{U}(t;\vec{F})=0$ comme distribution sur $\boldsymbol{R}^1$. On a alors que $\vec{F}=\vec{0}$.*

Ce Lemme est une conséquence immédiate du fait que les polynômes $\{Q_q(\tau)\}_{q=0}^{m-k-1}$ engendrent tous les polynômes d'ordre $\leqq(m-k-1)$ à cause de la Condition sur L dans le paragraphe 2.

D'autre part, étant donné un $\vec{F}\in \boldsymbol{C}^m$, la fonction $\hat{\mathcal{U}}(\tau;\mathscr{R}\vec{F})$ est holomorphe dans le demi-plan inférieur: Im $\tau\leqq 0$, tandis que la fonction $\hat{\mathcal{U}}(\tau;\vec{F}-\mathscr{R}\vec{F})$ l'est dans le demi-plan supérieur: Im $\tau\geqq 0$. Nous voyons de plus que, si $\hat{\mathcal{U}}(\tau;\vec{F})$ est une fonction entière, alors $\vec{F}=\vec{0}$. Ces considérations sur l'holomorphie de $\hat{\mathcal{U}}(\tau;\vec{F})$, surtout autour de chaque zéro de $P^0(\tau)$, nous donnent enfin la Proposition suivante:

Proposition 3. *Le rang de la matrice $\mathscr{R}$ est égal à m_+.*

Nous omettons les démonstrations détaillées des Propositions 1, 2, et 3.

Enfin, la solution $u(t)$ de l'équation (9) existe pour la donnée $(g(t),\boldsymbol{b})$ quelconque, et s'écrit brièvement

$$u(t)=Gg(t)+K(t;\boldsymbol{b}), \tag{20}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} &Gg(t)=(E\tilde{g})_+(t)-\mathcal{U}(t;\mathscr{D}\mathscr{B}((E\tilde{g})_+)^{\to})\in W^m_k,\ \text{et}\\ &K(t;\boldsymbol{b})=\mathcal{U}(t;\mathscr{D}\boldsymbol{b})\in W^m_k.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

L'unicité de la solution est garantie par le Lemme précédent. Le Théorème est donc établi.

Nous remarquons ici que les opérateurs $G: L^2(\boldsymbol{R}^1_+)\to W^m_k$ et $K: \boldsymbol{C}^m_+\to W^m_k$ définis par (21) correspondent à l'opérateur de Green et au noyau de Poisson respectivement dans la théorie habituelle des problèmes aux limites généraux du type elliptique non-dégénéré. L'opérateur G est un isomorphisme de $L^2(\boldsymbol{R}^1_+)$ sur un sous-espace vectoriel fermé de W^m_k défini par

$$D_{\{L,\mathscr{B}\}}=\{u(t)\in W^m_k\,;\,\mathscr{B}\vec{u}=\boldsymbol{0}\}. \tag{22}$$

4. Commentaires. L'opérateur adjoint formel à $L(t;D_t)$ peut être écrit sous la même forme que (1). Donc, il sera intéressant de considérer des problèmes adjoints (probablement dans le même cadre

W_k^m). Mais malheureusement, la Condition sur L introduite dans le paragraphe 2 n'est pas conservée par passage à l'adjoint.

Le présent travail a été motivé par la thèse de Monsieur M. S. Baouendi [1]. L'auteur désire lui exprimer la reconnaissance pour les discussions si fructueuses. Le détail de la démonstration du Théorème ci-dessus sera publié bientôt.

References

[1] Baouendi, Mohamed Salah: Sur une classes d'opérateurs elliptiques dégénérés. Thèse, Paris (1966); Bull. Soc. Math. France, **95**, 45–87 (1967).

[2] Schechter, Martin: General boundary value problems for elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math., **12**, 457–486 (1959).