

192. Sur les développements orthogonaux dans $L(p, q)$. I¹⁾

Par D. Lass FERNANDEZ

Instituto de Matemática, Universidade de Campinas,
Campinas, São Paulo, Brasil

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1969)

1. Introduction. Soit $L(p, q)$ un espace de Lorentz, dont les fonctions sont définies sur le segment fini $[a, b]$ et à valeurs complexes.

Étant donné un système orthonormal $\Phi = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots\}$ pour chaque $f \in L(p, q)$, nous poserons $\hat{f}_n = \int_a^b f(t) \overline{\theta_n(t)} dt = (f | \theta_n)$ et $\hat{f} = (f_n)$ la suite des coefficients de Fourier \hat{f}_n de la fonction f .

Le but de cet article est d'indiquer quelques résultats relatifs aux développements orthogonaux dans le cadre des espaces de Lorentz. Le résultat principal est le suivant.

Théorème A. Pour que l'opérateur $F(f) = \hat{f}$, vérifie la condition

$$F: L(p, q) \rightarrow 1(p', q)$$

il faut et il suffit qu'étant donnée $c \in 1(p, q')$ il existe une fonction $f \in L(p', q')$ telle que $c = \hat{f}$ de telle façon que l'opérateur $F^\circ(c) = f$ vérifie la condition

$$F^\circ: 1(p, q') \rightarrow L(p', q').$$

(nous utilisons la flèche \rightarrow pour indiquer la continuité d'une application linéaire d'un espace de Lorentz dans un autre).

Dans cette note nous suivrons la terminologie et les propriétés des espaces de Lorentz d'après Oklander [5].

2. Series orthogonales dans $L(p, q)$. Considérons la matrice

$$2.0(1) \quad (T) = (a_{ij}) \quad (i, j = 0, 1, \dots)$$

où les a_{ij} sont des nombres réels et supposons que

$$(i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{kn} = 0,$$

$$2.0(2) \quad (ii) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (|a_{k1}| + |a_{k2}| + \dots + |a_{knk}|) = C,$$

$$(iii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k1} + a_{k2} + \dots + a_{knk}) = 1.$$

Soit S l'espace vectoriel des suites $s = (s_n) = (s_0, s_1, \dots)$.

2.1. Définition. On dit que la transformation linéaire définie sur S par

1) Cette recherche fut partialement soutenue par la FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo—Brasil). Elle a été développée pendant le séjour de l'auteur à l'Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur (Argentina).

$$T(s) = \sigma = (\sigma_i) = \left(\sum_{k=1}^{n_i} a_{ik} s_k \right)$$

est la T -transformation de S déterminée par la matrice (T) . Si la suite (σ_i) est convergente on dit que la suite (s_i) est T -somable.

Il est bien connu que si $s_n \rightarrow s_\infty$, alors $\sigma_n \rightarrow \sigma_\infty = s_\infty$.

2.2. Définition. On dit que la transformation

$$K_i(s, t) = \sum_{k=0}^{n_i} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^k \theta_j(s) \overline{\theta_j(t)} \right)$$

déterminée par la matrice (T) , est la T -transformation du noyau $\sum_0^k \theta_j(s) \overline{\theta_j(t)}$ du système orthonormal Φ . Nous supposons que

$$\int_a^b |K_i(s, t)| ds = \int_a^b |K_i(t, s)| ds \leq C,^{2)} \quad \text{p.p.}$$

D'un autre côté, on a

$$\sigma_i = \sigma_i(f; s) = \int_a^b K_i(s, t) f(t) dt.$$

2.3. Théorème. Soit X un espace de Banach intermédiaire entre L^1 et L^∞ ,

$$s_k = s_k(f; t) = \sum_{j=0}^k \theta_j(t) (f | \theta_j) \quad \text{et} \quad \sigma_i(f; t) = \sum_{k=0}^{n_i} a_{ik} s_k(f; t)$$

alors

$$\sigma_i : X \rightarrow X.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

(i) $\sigma_i : L^1 \rightarrow L^1$ et (ii) $\sigma_i : L^\infty \rightarrow L^\infty$.

Pour cela soit $f \in L^1$; alors

$$\int_a^b |\sigma_i(t)| dt = \int_a^b \left| \int_a^b K_i(t, s) f(s) ds \right| dt \leq \int_a^b |f(s)| \left(\int_a^b |K_i(s, t)| dt \right) ds \leq C \|f\|_1.$$

Soit maintenant $f \in L^\infty$; alors

$$|\sigma_i| \leq \int_a^b |K_i(t, s)| |f(s)| ds \leq C \|f\|_\infty.$$

2.4. Proposition. Soit $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. Supposons que $\|\sigma_i\|_{pq} \leq C$, $i=0, 1, \dots$, et soit (c_n) telle que $c_n \rightarrow 0$ et

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{n_i} a_{ik} \sum_n^k c_n \theta_n$$

Alors

$$\sum c_n \theta_n \in L(p, q).^{3)}$$

Démonstration. Comme $\|\sigma_i\|_{pq} \leq C$, $i=0, 1, \dots$, il existe une suite partielle (σ_{i_k}) extraite de (σ_n) qui converge faiblement vers $f \in L(p, q)$.

Donc

$$2.4(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \sigma_{i_k}(t) \overline{\theta_j(t)} dt = \int_a^b f(t) \overline{\theta_j(t)} dt,$$

d'autre part, on a

2) L'emploi de la lettre C est réservé pour désigner des constantes.

3) La notation $\sum c_n \theta_n \in L(p, q)$ indique l'existence de $f \in L(p, q)$, telle que $c_n = (f | \theta_n)$.

$$2.4(2) \quad \sigma_{i_k} = \sum_j a_{i_k j} \sum_n c_n \theta_n.$$

En remplaçant 2.4(2) dans 2.4(1) et en utilisant 2.0(2), on obtient $c_n = (f | \theta_n)$ et la démonstration est terminée.

Nous avons à utiliser le lemme suivant.

2.5. Proposition. Soit $f \in L(p, q)$, $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q < \infty$. Posons

$$2.5(1) \quad f_k(t) = k \int_t^{t+1/k} f(u) du \quad (f(u) = 0, \text{ si } u > b)$$

alors

$$2.5(2) \quad \|f - f_k\|_{pq} \rightarrow 0.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f est bornée, $|f| \leq M$; d'après un théorème bien connu il existe une fonction $\int_a^t f(s) ds$, que a pour dérivée $f(t)$, p.p. De cette façon $f_k(t)$ est convergente, p.p., vers $f(t)$. Alors, on a

$$|f_k(t) - f(t)| \rightarrow 0, \text{ p.p. et } |f_k(t) - f(t)|^* \rightarrow 0.^4$$

Donc, par le théorème de Lebesgue, on a

$$2.5(3) \quad \|f_k - f\|_{pq} \rightarrow 0.$$

Soit maintenant f non bornée; posons

$$g^{(M)}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } |f(t)| \leq M, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, si $\varepsilon > 0$ et $M > M^\circ(\varepsilon)$, on a

$$\|f - g^{(M)}\|_{pq} < \varepsilon.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|f - f_k\|_{pq} &\leq \|f - g^{(M)}\| + \|g^{(M)} - f_k\| \leq \varepsilon + \|g^{(M)} - g_k^{(M)}\| + \|g_k^{(M)} - f_k\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon' + 3p \|f - g^{(M)}\|_{pq} < \varepsilon + \varepsilon' + 3p\varepsilon' = \varepsilon''. \end{aligned}$$

$g^{(M)}$ étant bornée posons

$$\psi_k = f_k - g_k^{(M)} \quad \text{et} \quad \psi = f - g^{(M)}$$

alors

$$\psi_k(u) = \int_a^b \psi(t) K_k(u-t) dt$$

où

$$K_k(s) = \begin{cases} k, & \text{si } s \in [0, 1/k], \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

donc, par (6) (th. 2.6), on a

$$\|\psi_k\|_{pq} \leq 3p \|\psi\|_{pq} \|K_k\|_1 \leq 3p \|\psi\|_{pq}$$

et le lemme est démontré.

2.6. Proposition. Si $\sum c_n \theta_n \in L(p, q)$, $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q < \infty$, on a

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\sigma_m - \sigma_n\|_{pq} = 0.$$

Démonstration. Par 2.3, nous avons

$$2.6(1) \quad \begin{aligned} \|\sigma_n(f)\|_{pq} &\leq C \|f\|_{pq}, \\ \|\sigma_n(f) - \sigma_n(g)\|_{pq} &\leq C \|f - g\|_{pq}. \end{aligned}$$

4) h^* denote le réarrangement non-croissant de h , voir [1] ou [5].

Etant donnée la fonction f soit $g_k(t) = k \int_t^{t+1/k} f(u) du$, alors d'après 2.5 la suite (g_k) converge fortement vers f . Considerons l'inégalité

$$2.6(2) \quad \|\sigma_m(f) - \sigma_n(f)\|_{pq} = \|\sigma_m(f) - \sigma_m(g_k)\|_{pq} + \|\sigma_m(g_k) - \sigma_n(g_k)\|_{pq} + \|\sigma_n(g_k) - \sigma_n(f)\|_{pq}$$

En utilisant 2.6(1), on voit que si $k \rightarrow \infty$, alors

$$\|\sigma_m(f) - \sigma_m(g_k)\|_{pq} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|\sigma_n(f) - \sigma_n(g_k)\|_{pq} \rightarrow 0.$$

On a aussi

$$2.6(3) \quad \|\sigma_m(g_k) - \sigma_n(g_k)\|_{pq} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Comme g_k est bornée, alors $g_k \in L^2$, donc

$$\|\sigma_m(g_k) - \sigma_n(g_k)\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad m, n \rightarrow \infty.$$

par l'inégalité de Bessel et par les conditions 2.0(2). Donc

$$\int_a^b |\sigma_m(g_k) - \sigma_n(g_k)|^2 dt < \delta^3$$

si, $m, n \geq M^\circ(\delta)$; ainsi sauf sur un t -ensemble E de mesure $\leq \delta$, on a

$$|\sigma_m(g_k; t) - \sigma_n(g_k; t)| < \delta$$

done

$$\begin{aligned} \|\sigma_m - \sigma_n\|_{pq} &\leq C \left(\int_0^{b-a} |\sigma_m(t) - \sigma_n(t)|^{*aq/p-1} dt \right)^{1/q} = C \left(\int_0^\delta + \int_\delta^{b-a} \right)^{1/q} \\ &< C(\delta^a(b-a)^{a/p} + 2^a M^a \delta')^{1/q} = \delta'' \end{aligned}$$

Cela démontre 2.6(3) et par conséquent 2.6(2) tend vers zéro.

2.7. Proposition. Si $S(f) = \sum c_n \theta_n \in L(p, q)$, $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q < \infty$; on a

$$\|\sigma_n - f\|_{pq} \rightarrow 0.$$

Démonstration. Par 2.8, on a

$$\|\sigma_m - \sigma_n\|_{pq} \rightarrow 0$$

il existe donc $F \in L_{pq}$ telle que

$$\|\sigma_m - F\|_{pq} \rightarrow 0$$

et alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \sigma_m g dt = \int_a^b F g dt$$

où $g \in L(p', q')$. En posant $g = \bar{\theta}_j$, $j = 0, 1, \dots$, il vient

$$\int_a^b f \bar{\theta}_j dt = c_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \sigma_m \bar{\theta}_j dt = \int_a^b F \bar{\theta}_j dt.$$

Par conséquent $f = F$, p.p., et la proposition est démontrée.