25. *Sur la restriction maximale d'un langage*

Par Masami ITO
Université de Kyoto-Sangyo

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Feb. 12, 1972)

Dans ce mémoire, nous définissons la restriction maximale d'un langage associé à l'espace contextuel*) et nous explorons ses structures. Nous appliquons quelques résultats obtenus à un langage d'états finis.

1. Restriction maximale d'un langage. Soit $\mathcal{M}=(B,M)$ une restriction d'un langage $\mathcal{L}=(A,L)$ telle que $d(\mathcal{M})=n$. Nous appelons $\mathcal{M}$ une *restriction maximale* du langage $\mathcal{L}$, lorsque nous avons la condition suivante:

Pour une restriction $\mathcal{N}=(C,N)$ quelconque de $\mathcal{L}$ telle que $d(\mathcal{N})=n$, l'ensemble N ne contient pas strictement l'ensemble M.

2. Existence de la restriction maximale d'un langage. Pour le cas où nous aurions au moins une restriction d'un langage, nous avons le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit $\mathcal{M}=(B,M)$ une restriction d'un langage $\mathcal{L}=(A,L)$. Nous avons alors une restriction maximale $\mathcal{N}=(C,N)$ de $\mathcal{L}$ telle que $d(\mathcal{N})=d(\mathcal{M})$ et $M\subseteq N$.*

Démonstration. Considérons la famille $F=\{\mathcal{H}_\lambda=(D_\lambda,H_\lambda)\,;\,\lambda\in\Lambda\}$ de toutes les restrictions de $\mathcal{L}$ telles que $d(\mathcal{H}_\lambda)=d(\mathcal{M}), M\subseteq H_\lambda$ et $B\subseteq D_\lambda \subseteq A$ (où $\lambda\in\Lambda, \Lambda$ est un ensemble certain). Pour cette famille, nous introduisons une relation d'ordre $\leqq$ comme il suit:

(1) $\mathcal{H}_\lambda\leqq\mathcal{H}_\mu$, si $H_\lambda\subset H_\mu$.

(2) $\mathcal{H}_\lambda\leqq\mathcal{H}_\mu$, si $H_\lambda=H_\mu$ et que $D_\lambda\subseteq D_\mu$.

Soit $T=\{\mathcal{H}_\mu\,;\,\mu\in\Sigma, \Sigma\subseteq\Lambda\}$ une sous-famille de F étant totalement ordonnée par la relation $\leqq$. Si nous pouvons démontrer que cette sous-famille possède au moins un majorant dans la famille F, nous avons un élément maximal dans la famille F à l'aide de théorème de Zorn et nous pouvons considérer cet élément comme un langage satisfaisant à la conclusion du théorème 1.

Posons $D=\bigcup_{\mu\in\Sigma} D_\mu$ et $H=\bigcup_{\mu\in\Sigma} H_\mu$. Considérons un langage $\mathcal{H}=(D,H)$. Il est aisé de voir que ce langage est une restriction de $\mathcal{L}$ ayant le diamètre $d(\mathcal{M})$ et qu'il est un majorant de la sous-famille T dans la famille F vu la manière de construire ce langage.

3. E-équivalence.**) Pour une préparation d'explorer une

---

*) Quant aux notions et aux symboles que nous employons dans ce mémoire, voir M. Ito (1).

**) Concernant un déroulement de cette notion, voir S. Marcus (2).

structure d'une restriction maximale d'un langage, nous introduisons la notion de E-équivalence.

Soient $\mathcal{L}=(A, L)$ un langage et x, y deux éléments quelconques de A^+. Lorsque nous avons la condition suivante, nous disons que x et y sont *E-équivalents* l'un et l'autre, et nous employons un symbole $S(x)$ pour représenter la classe de E-équivalence contenant x:

Pour chaque contexte (α, β) $(\alpha, \beta \in A^*)$, *nous avons* $\alpha x\beta \in L$ *si et seulement si nous avons* $\alpha y\beta \in L$.

4. Structure d'une restriction maximale d'un langage. Pour une restriction maximale quelconque d'un langage, nous avons le théorème suivant:

Théorème 2. *Soit* $\mathcal{M}=(B, M)$ *une restriction maximale d'un langage* $\mathcal{L}=(A, L)$. *Nous avons alors* $M=\bigcup_{x\in M} S(x)$.

Démonstration. Posons $N=\bigcup_{x\in M} S(x)$. Il est aisé de voir que $M\subseteq N\subseteq L$. Considérons un langage $\mathcal{N}=(A, N)$. Si nous pouvons démontrer que le langage $\mathcal{N}$ est une restriction du langage $\mathcal{L}$ ayant le diamètre $d(\mathcal{M})$, nous pouvons avoir immédiatement $M=N$ d'après la définition d'une restriction maximale d'un langage.

Soient x, y deux éléments quelconques de N. Démontrons que $\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{N}}=\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{L}}$. D'après $x, y \in N$, nous avons deux éléments x', y' de M tels que $x\in S(x'), y\in S(y')$.

Considérons une chaîne de x' à y' dans le langage $\mathcal{M}$:

$$x'=x'_0, x'_1, x'_2, \cdots, x'_{q-1}, x'_q=y' \tag{1}$$

En substituant x, y à x', y', nous avons une séquence d'éléments de A^+:

$$x=x_0, x_1=x'_1, x_2=x'_2, \cdots, x_{q-1}=x'_{q-1}, x_q=y \tag{2}$$

D'après $C(x'_i)_{\mathcal{M}}\cap C(x'_{i+1})_{\mathcal{M}}\subseteq C(x_i)_{\mathcal{N}}\cap C(x_{i+1})_{\mathcal{N}}$ $(i=1, 2, \cdots, q-2)$, il suffit de vérifier que $\alpha x'\beta, \alpha x'_1\beta \in M$ entraîne $\alpha x\beta, \alpha x_1\beta\in N$ et que $\gamma x'_{q-1}\delta, \gamma y'\delta \in M$ entraîne $\gamma x_{q-1}\delta, \gamma y\delta \in N$ pour que la séquence (2) soit une dhaîne de x à y dans le langage $\mathcal{N}$. Mais, il est facile de le constater. Car nous avons en général $\alpha x\beta\in S(\alpha x'\beta)$, pour tous les $x\in S(x')$ et $\alpha, \beta \in A^*$. En résultat, nous avons une chaîne de x à y ayant la longueur q dans le langage $\mathcal{N}$. En conséquence, nous avons $\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{N}}\leq \operatorname{dis}(x', y')_{\mathcal{M}}$. Etant donné $N\subseteq L$, nous avons $\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{L}}\leq\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{N}}$, i.e., nous avons $\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{L}}\leq \operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{N}}\leq\operatorname{dis}(x', y')_{\mathcal{M}}$.

De la même manière, nous pouvons démontrer que $x', x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}, y'$ est une chaîne de x' à y' dans le langage $\mathcal{L}$, si $x, x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}, y$ est une chaîne de x à y dans le langage $\mathcal{L}$. Par conséquent, nous avons $\operatorname{dis}(x', y')_{\mathcal{L}}\leq\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{L}}$. D'après le fait que $\mathcal{M}$ est une restriction de $\mathcal{L}$, nous $\operatorname{dis}(x', y')_{\mathcal{L}}=\operatorname{dis}(x', y')_{\mathcal{N}}$. Nous avons ainsi $\operatorname{dis}(x', y')_{\mathcal{M}}\leq\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{L}}$. Par cette inégalité et l'inégalité précédente, nous avons $\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{N}}=\operatorname{dis}(x, y)_{\mathcal{L}}=\operatorname{dis}(x', y')_{\mathcal{M}}$. En utilisant cette égalité, nous pouvons facilement vérifier que $d(\mathcal{N})=d(\mathcal{M})$.

5. Langage d'états finis. Pour appliquer les résultats obtenus à un langage plus concret, nous considérons un langage d'états finis. Nous avons un résultat célèbre dans ce genre de langage***) :

Soit $\mathcal{L}=(A, L)$ *un langage.* $\mathcal{L}$ *est un langage d'états finis si et seulement si le nombre des classes de E-équivalence de ce langage est fini.*

6. Application à un langage d'états finis. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Soit* $\mathcal{M}=(A, M)$ *une restriction maximale d'un langage d'états finis* $\mathcal{L}=(A, L)$. *Alors,* $\mathcal{M}$ *est aussi un langage d'états finis.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous préparons la proposition suivante:

Proposition. *Soit* $\mathcal{M}=(A, M)$ *une restriction maximale d'un langage* $\mathcal{L}=(A, L)$. *Considérons respectivement* $\{S(x)\,;\, x \in A^{+}\}$ *et* $\{T(x)\,;\, x \in A^{+}\}$ *comme un ensemble de classes de E-équivalence de* $\mathcal{L}$ *et celui de* $\mathcal{M}$. *Nous avons alors* $S(x) \subseteq T(x)$ *pour chaque* $x \in A^{+}$.

Démonstration de la proposition. Soit $y \in S(x)$. Supposons que $\alpha x \beta \in M$. Nous avons immédiatement $\alpha y \beta \in S(\alpha x \beta)$. D'après $\alpha x \beta \in M$ et de la structure de M représentée par le théorème 2, nous avons $\alpha y \beta \in M$. Supposons maintenant que $\alpha y \beta \in M$. Etant donné $y \in S(x)$, nous avons $x \in S(y)$. Nous avons ainsi $\alpha x \beta \in M$, de la même manière ci-dessus. Par conséquent, nous avons $y \in T(x)$.

Démonstration du théorème 3. D'après la proposition, nous pouvons voir immédiatement que le nombre de classes de E-équivalence du langage $\mathcal{M}$ n'est pas supérieur à celui du langage $\mathcal{L}$. En conséquence, si le nombre de classes de E-équivalence du langage $\mathcal{L}$ est fini, celui du langage $\mathcal{M}$ est évidemment fini.

Références

[1] M. Ito: Sur l'extension et la restriction d'un langage associé à l'espace contextuel. Proc. Japan Acad., **48**, 94–97 (1972).

[2] S. Marcus: Algebraic Linguistics; Analytical Models. Academic Press (1967).

[3] Y. Bar-Hillel: Language and Information. Addison-Wesley (1964).

***) En ce qui concerne la définition et quelques propriétés de langages d'états finis, voir Y. Bar-Hillel (3).