

### 39. La décomposition de singularités d'ultradistributions cohomologiques

Par Mitsuo MORIMOTO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., March 13, 1972)

Le but de cette note est d'annoncer des résultats concernant la décomposition de singularités (modulo fonctions entières) d'ultradistributions cohomologiques. Notre présente théorie est analogue à celle du faisceau  $\mathcal{C}$  pour les hyperfonctions ([3], voir aussi [4, 5]).

Soit  $V$  un espace euclidien réel à  $n$  dimensions. Notons son complexifié par  $V_{\mathcal{C}} = V \times \sqrt{-1} V$ . Soit  $\mathcal{O}$  le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur  $V_{\mathcal{C}}$ . Pour un ouvert  $\Omega$  de  $V_{\mathcal{C}}$ ,  $\mathcal{O}(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ . On note le  $k$ -ième espace de cohomologie relative à support dans un localement fermé  $F$  de  $V_{\mathcal{C}}$  et à coefficients dans le faisceau  $\mathcal{O}$  par  $H^k[F] \cong H^k_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{O})$ , où  $\Omega$  désigne un ouvert de  $V_{\mathcal{C}}$  contenant  $F$  comme son sous-ensemble fermé. L'espace  $\mathcal{U}(V)$  des ultradistributions cohomologiques (ou plutôt ultra-hyperfonctions) sur  $V$  est, par définition, la limite inductive des  $n$ -ièmes espaces de cohomologie relative à support dans un tube  $T(G) = V \times \sqrt{-1} G$  à base convexe compacte et à coefficients dans le faisceau  $\mathcal{O}$ :

$$\mathcal{U}(V) = \lim_{G \subset V} \text{ind } H^n[T(G)],$$

où  $G$  parcourt tous les compacts convexes de  $V$ , la limite inductive étant prise suivant les applications naturelles:

$$H^n[T(G)] \rightarrow H^n[T(G')], \quad G \subset G'.$$

On a montré dans notre article précédent [2] que l'espace des ultra-hyperfonctions  $\mathcal{U}(V)$  contient l'espace des fonctionnelles analytiques sur  $V_{\mathcal{C}}$ ,  $\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}})'$  et l'espace des hyperfonctions sur  $V$ ,  $\mathcal{B}(V) = H^n[T(\{0\})]$ , où  $T(\{0\}) = V \times \sqrt{-1} 0 = V$ .

Désignons par  $V^*$  le dual de l'espace vectoriel  $V$ , par  $\langle, \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $V \times V^*$ .  $S_{\infty}^*$  est, par définition, l'ensemble des demi-droites issues de l'origine de  $V^*$ :

$$S_{\infty}^* = (V^* \setminus \{0\}) / \mathbf{R}^+.$$

Pour un vecteur non nul  $\xi \in V^*$  on note par  $\xi_{\infty}$  la demi-droite issue de l'origine de  $V^*$  qui passe par le point  $\xi$ .  $S_{\infty}^*$  est isomorphe à la  $(n-1)$ -sphère et sera appelée la cosphère à l'infini. On note par  $p$  la projection  $\xi \mapsto \xi_{\infty}$  de  $V^* \setminus \{0\}$  sur  $S_{\infty}^*$ . Un sous-ensemble  $I$  de  $S_{\infty}^*$  est dit convexe si le cône  $p^{-1}(I)$  l'est. On désigne par  $D(I)$  le cône dual non-positif fermé de  $I$ :

$$D(I) = \{x \in V; \langle x, \xi \rangle \leq 0 \text{ pour tout } \xi \in p^{-1}(I)\}.$$

Si on a  $I \supset J$ , alors  $D(I) \subset D(J)$ . Pour  $x \in V$ ,  $D(I) + x$  désigne le cône translaté de  $D(I)$ . Pour  $I$  ouvert convexe de  $S_{\infty}^*$ , on pose

$$\Psi_1(I) = \lim_{x \in V} \text{ind } H^n[T(D(I) + x)],$$

où la limite inductive est prise suivant les applications naturelles :

$$H^n[T(D(I) + x)] \rightarrow H^n[T(D(I) + x')], \quad T(D(I) + x) \subset T(D(I) + x').$$

Si  $I$  et  $J$  sont deux ouverts convexes de  $S_{\infty}^*$  tels que  $I \supset J$ , alors l'application  $p_J^I: \Psi_1(I) \rightarrow \Psi_1(J)$  est définie comme la limite inductive des applications naturelles:  $H^n[T(D(I) + x)] \rightarrow H^n[T(D(J) + x)]$ . Il est clair que les  $p_J^I$  satisfont à la condition de chaîne. Comme la famille des ouverts convexes de  $S_{\infty}^*$  forme une base des ouverts de  $S_{\infty}^*$ , les  $\Psi_1(I)$  forment, avec les applications  $p_J^I$ , un préfaisceau  $\Psi_1$  de  $\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}})$ -modules sur  $S_{\infty}^*$ .

**Théorème 1.** *On désigne par  $\Psi$  le faisceau sur  $S_{\infty}^*$  associé au préfaisceau  $\Psi_1$ . L'espace des sections de  $\Psi$  sur un ouvert convexe  $I$  de  $S_{\infty}^*$ ,  $\Psi(I)$  est donné par  $\Psi(I) = \lim_{I' \subset I} \text{proj } \Psi_1(I')$ , où  $I'$  parcourt tous les ouverts convexes relativement compacts dans  $I$ .*

Notre faisceau  $\Psi$  sert de caractériser la singularité d'une ultra-hyperfonction modulo fonctions entières. Une fonction entière  $f$  définit, par restriction, une ultra-hyperfonction que nous noterons par  $\rho(f)$ . Plus précisément, l'application  $\rho$  de  $\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}})$  dans  $\mathcal{U}(V)$  est définie comme composée :

$$\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\text{rest}} \mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{U}(V),$$

où  $\mathcal{A}(V)$  désigne l'espace des fonctions réel-analytiques sur  $V$ . L'application  $\rho$  est injective, étant composée des injections. Construisons maintenant une application  $\sigma$  de  $\mathcal{U}(V)$  dans l'espace des sections de  $\Psi$  sur  $S_{\infty}^*$ ,  $\Psi(S_{\infty}^*)$ . Pour un compact convexe  $G$  de  $V$  et un ouvert convexe propre  $I$  de  $S_{\infty}^*$ , il existe un point  $x$  de  $V$  tel que  $G \subset D(I) + x$ . Alors l'application naturelle:  $H^n[T(G)] \rightarrow H^n[T(D(I) + x)]$  est définie. Comme la limite inductive de ces applications, on définit l'application  $\sigma_I: \mathcal{U}(V) \rightarrow \Psi(I)$ . Si  $J$  est un autre ouvert convexe de  $S_{\infty}^*$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \Psi(I) & \\ \sigma_I \nearrow & & \searrow p_{I \cap J}^I \\ \mathcal{U}(V) & & \Psi(I \cap J) \\ \sigma_J \searrow & & \nearrow p_{I \cap J}^J \\ & \Psi(J) & \end{array}$$

Par conséquent les applications  $\sigma_I$ , se recollant, définissent une application  $\sigma: \mathcal{U}(V) \rightarrow \Psi(S_{\infty}^*)$ . On a alors le théorème central de cette note.

**Théorème 2.** *La suite suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{U}(V) \xrightarrow{\sigma} \Psi(S_{\infty}^*) \longrightarrow 0.$$

Désignons par  $S_0$  l'ensemble des demi-droites issues de l'origine de  $V$ .  $S_0$  est isomorphe à la  $(n-1)$ -sphère et sera appelée sphère à

l'origine. Pour un point  $x \in V, x \neq 0$ , on note par  $x_0$  l'élément de  $S_0$  contenant le point  $x$ . L'application  $q: x \rightarrow x_0$  est la projection de  $V \setminus \{0\}$  sur  $S_0$  et on a

$$S_0 = (V \setminus \{0\}) / \mathbf{R}^+.$$

Un sous-ensemble  $\Gamma$  de  $S_0$  est dit convexe si le cône  $q^{-1}(\Gamma)$  l'est. Posons, pour un ouvert convexe  $\Gamma$  de  $S_0$ ,

$$\mathcal{P}_1(\Gamma) = \lim_{x \in V} \text{ind } \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x)),$$

où la limite inductive est prise suivant les restrictions :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x)) &\rightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x')), \\ T(q^{-1}(\Gamma) + x) &\supset T(q^{-1}(\Gamma) + x'). \end{aligned}$$

Soit  $\Delta$  un autre ouvert convexe de  $S_0$  tel que  $\Gamma \supset \Delta$ . Alors on définit l'application  $q_\Delta^r: \mathcal{P}_1(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}_1(\Delta)$  comme la limite inductive des applications de restriction:  $\mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x)) \rightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Delta) + x))$ . Il est clair que les  $\mathcal{P}_1(\Gamma)$  et les  $q_\Delta^r$  forment un préfaisceau  $\mathcal{P}_1$  sur  $S_0$ . On désigne par  $\mathcal{P}$  le faisceau sur  $S_0$  associé au préfaisceau  $\mathcal{P}_1$ . L'espace des sections de  $\mathcal{P}$  sur un ouvert convexe  $\Gamma$  de  $S_0$ ,  $\mathcal{P}(\Gamma)$  est donné par:  $\mathcal{P}(\Gamma) = \lim_{\Gamma' \subset \Gamma} \text{proj } \mathcal{P}_1(\Gamma')$ , où  $\Gamma'$  parcourt les sous-ensembles ouverts convexes et relativement compacts de  $\Gamma$ . Remarquons que l'espace des sections sur un domaine  $\Gamma$  de  $S_0$  du faisceau  $\mathcal{P}$  est égal à l'espace des fonctions entières  $\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}})$  pourvu que  $\Gamma \cap (-\Gamma) \neq \emptyset$ . On peut définir l'application de "valeur au bord"  $\delta_\Gamma: \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{U}(V)$  comme l'application de cobord de cohomologie.

**Théorème 3.** *Pour un ouvert convexe  $\Gamma$  de  $S_0$ , on prend l'ensemble  $\Gamma^*$  fermé convexe de  $S_0^*$  tel que  $\overline{(q^{-1}(\Gamma))} = -D(\Gamma^*)$ ,  $\overline{(q^{-1}(\Gamma))}$  désignant l'adhérence de  $q^{-1}(\Gamma)$ . Une ultra-hyperfonction  $\varphi$  appartient à l'image de  $\delta_\Gamma: \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{U}(V)$  si et seulement si le support de  $\sigma(\varphi)$  est contenu dans  $\Gamma^*$ .*

Supposons maintenant que  $\Gamma$  est un convexe relativement ouvert de  $S_0$ , c'est-à-dire que le cône  $q^{-1}(\Gamma)$  est convexe et ouvert dans le sous-espace affine de  $V$  engendré par  $q^{-1}(\Gamma)$ . On note par  $\text{codim } \Gamma$  la codimension du susdit sous-espace de  $V$ . On a alors

$$H_\Gamma^k(S_0; \mathcal{P}) = \lim_{x \in V} \text{ind } H^k[T(q^{-1}(\Gamma) + x)].$$

Remarquons la nullité suivante:

$$H_\Gamma^k(S_0; \mathcal{P}) = 0 \quad \text{si } k \neq \text{codim } \Gamma.$$

On peut définir même dans cette situation l'application de "valeur au bord"  $\delta_\Gamma: H_\Gamma^{\text{codim } \Gamma}(S_0; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{U}(V)$ .

**Théorème 3 bis.** *Soit  $\Gamma$  un convexe relativement ouvert de  $S_0$ . Une ultrahyperfonction  $\varphi$  appartient à l'image de  $\delta_\Gamma: H_\Gamma^{\text{codim } \Gamma}(S_0; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{U}(V)$  si et seulement si le support de  $\sigma(\varphi)$  est contenu dans  $\Gamma^*$ .*

**Remarques.** On peut définir un sous-faisceau  $\tilde{\mathcal{P}}$  de  $\mathcal{P}$  et un sous-faisceau  $\tilde{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  comme suit: Posons, pour un ouvert convexe  $I$  de  $S_0^*$ ,

$$\tilde{\Psi}(I) = H^n[T(D(I))].$$

Pour deux ouverts convexes  $I, J$  de  $S_0^*$  tels que  $I \supset J$ , l'application  $\tilde{p}_J^I: \tilde{\Psi}(I) \rightarrow \tilde{\Psi}(J)$  est définie par l'application naturelle:  $H^n[T(D(I))] \rightarrow H^n[T(D(J))]$ . Alors le préfaisceau  $\tilde{\Psi}$  sur  $S_0^*$  défini par les  $\tilde{\Psi}(I)$  et les  $\tilde{p}_J^I$  est sous-faisceau du faisceau  $\Psi$ . L'application  $\tilde{\sigma}_I: \mathcal{B}(V) \rightarrow \tilde{\Psi}(I)$  est définie comme l'application naturelle:  $H^n[T(\{0\})] \rightarrow H^n[T(D(I))]$ . En recollant les applications  $\tilde{\sigma}_I$ , on définit l'application  $\tilde{\sigma}: \mathcal{B}(V) \rightarrow \tilde{\Psi}(S_0^*)$ . Alors on a la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_c) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathcal{B}(V) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \tilde{\Psi}(S_0^*) \longrightarrow 0,$$

où l'application  $\tilde{\rho}$  est la restriction. Comparer cette suite avec la suite exacte du théorème (5.1) de [3].

Posons, pour un ouvert convexe  $\Gamma$  de  $S_0$ ,

$$\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) = \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma))).$$

Avec les applications de restriction  $\tilde{q}_\Delta^I: \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma))) \rightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Delta)))$ ,  $T(q^{-1}(\Gamma)) \supset T(q^{-1}(\Delta))$ , les  $\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)$  forment un préfaisceau  $\tilde{\mathcal{P}}$ . Le préfaisceau  $\tilde{\mathcal{P}}$  est sous-faisceau du faisceau  $\mathcal{P}$  sur  $S_0$ . On peut définir l'application de "valeur au bord"  $\tilde{\delta}_\Gamma: \tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{B}(V)$  comme l'application de cobord. Une hyperfonction  $\varphi$  appartient à l'image de  $\tilde{\delta}_\Gamma: \tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{B}(V)$  si et seulement si le support de  $\tilde{\sigma}(\varphi)$  est contenu dans  $\Gamma^*$ .

Un analogue du théorème 3 bis est aussi valable pour les faisceaux  $\tilde{\mathcal{P}}$  et  $\mathcal{B}$ .

**Applications.** Vu les théorèmes 2 et 3, on peut dire que le support de la section  $\sigma(\varphi)$  du faisceau  $\Psi$  caractérise la singularité d'une ultra-hyperfonction  $\varphi \in \mathcal{U}(V)$  modulo fonctions entières. Un théorème du type "Edge of the Wedge" en cadre des ultra-hyperfonctions est un corollaire direct de nos théorèmes. On a par exemple

**Théorème 4.** Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux ouverts convexes de  $S_0$ .  $\Gamma$  désigne l'enveloppe convexe de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Si  $f_1 \in \mathcal{P}(\Gamma_1)$  et  $f_2 \in \mathcal{P}(\Gamma_2)$  satisfont à la condition:

$$\delta_{\Gamma_1}(f_1) = \delta_{\Gamma_2}(f_2) \quad \text{dans } \mathcal{U}(V),$$

alors il existe  $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$  dont les restrictions sur  $\mathcal{P}(\Gamma_1)$  et  $\mathcal{P}(\Gamma_2)$  coïncident respectivement avec  $f_1$  et  $f_2$ . Si  $\Gamma$  coïncide avec  $S_0$ , alors  $f$  est fonction entière.

En utilisant le faisceau  $\Psi$ , on peut démontrer une version du théorème fondamental de M. Sato [4, 5] en cadre des ultra-hyperfonctions. La démonstration repose sur le théorème de Cauchy-Kovalevskaja.

**Théorème 5.** Soit  $P(D)$  un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre  $m$ .  $P_m(\xi)$  est son polynôme caractéristique. Si une ultra-hyperfonction  $\varphi$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles  $P(D)\varphi = 0$ , alors on a

$$\text{supp } \sigma(\varphi) \subset \{\xi_\infty; P_m(\xi) = 0\}.$$

**Corollaire.** *Si l'opérateur  $P(D)$  est elliptique, alors  $\varphi \in \mathcal{U}(V)$  qui satisfait à l'équation  $P(D)\varphi=0$  est restriction d'une fonction entière.*

Ce corollaire en cas d'hyperfonctions se trouve implicitement dans la démonstration du théorème (VII. 1. 8) de [1].

Les démonstrations détaillées seront publiées ailleurs.

### Références

- [ 1 ] Komatsu, H.: Les hyperfonctions et les équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Univ. Tokyo Seminar Notes No. 22 (1968) (en japonais).
- [ 2 ] Morimoto, M.: Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier, **19**, 129–153 (1970).
- [ 3 ] —: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, **17**, 215–239 (1970).
- [ 4 ] Sato, M.: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, pp. 789–794.
- [ 5 ] Sato, M., et M. Kashiwara: Structure des hyperfonctions. Sûgaku-no-Ayumi, **15**, 9–71 (1970) (en japonais).