93. *Equations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes.* I

Théorème d'existence

Par Kazuhiko AOMOTO
Collège d'Education Générale, Université de Tokyo

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., Sept. 12, 1974)

Dans cette note on va enoncer un théorème d'existence des équations linéaires aux différences partielles et proposer le problème de connexion y associé.

Soit $E=(e_i,\ 1\leqq i\leqq n)$ une base du réseau entier $\boldsymbol{Z}^n$ dans $\boldsymbol{C}^n$. Soient $A_i(x)$ $(1\leqq i\leqq n)$ fonctions rationnelles de x dans $\boldsymbol{C}^n$ à valeurs dans $GL(m,\boldsymbol{C})$. On considère dans la suite une équation aux différence par rapport à une fonction matricielle $\Phi(x)$ de la forme suivante:

$$\Phi(x+e_i)=A_i(x)\cdot\Phi(x) \tag{1}$$

pour $1\leqq i\leqq n$. Supposons que les matrices $A_i(x)$ satisfassent à la condition de compatibilité:

$$A_i(x+e_j)\cdot A_j(x)=A_j(x+e_i)\cdot A_i(x) \tag{2}$$

pour $1\leqq i,j\leqq n$ telles qu'élles définissent de façon naturelle un cocycle de la cohomologie $H^1(\boldsymbol{Z}^n, GL(m,\boldsymbol{C}(x)))$. On désigne par $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ les coordonnées affines de x par rapport à la base E et par x' le point de $\boldsymbol{C}^{n-1}$ des coordonnées $(x_2,\cdots,x_n)$. Supposons que

(H, 1): *$A_i(x)$ $(1\leqq i\leqq n)$ aient les expansions de Laurent en $x_1=\infty$, x' etant fixé, de la forme suivante*:

$$A_i(x)=A_i^0(x')\cdot x_1^{h_i}+A_i^1(x')\cdot x_1^{h_i-1}+\cdots \tag{3}$$

où $A_i^t(x')$ désignent fonctions rationnelles de x' et que dans un voisinage V d'un point x' dans $\boldsymbol{C}^{n-1}$ elles satisfassent aux suivantes: i) *Les déterminants de $A_i^0(x')$ $(1\leqq i\leqq n)$ sont différents de zéro.* ii) *$A_i^0(x')$ $(2\leqq i\leqq n)$ ne dépendent pas de x' donc sont égales aux constantes A_i^0 réspectivement. De plus A_i^0 sont toutes diagonalisables.* iii) *Les valeurs propres de la matrice $A_1^0(x')$ sont toutes différentes les unes des autres.* Alors on a

Théorème 1. *A l'hypothèse* (H, 1) *il existe une suite formelle de Laurent $S(x)=1+\sum_1^\infty S^t(x')/x_1^t$, $S^t(x')$ étant des matrices rationnelles de x', telles que les matrices $\overline{A}_i(x)=S(x+e_i)^{-1}\cdot A_i(x)\cdot S(x)$ aient les suites formelles suivantes*:

$$\begin{aligned}&\overline{A}_1(x)=x_1^{h_1}\cdot(A_1^0(x')+\overline{A}_1^1(x')/x_1) \qquad \text{et}\\ &\overline{A}_i(x)=x_1^{h_i}\cdot(A_i^0+\overline{A}_i^1(x')/x_1+\overline{A}_i^2(x')/x_1^2+\cdots)\end{aligned} \tag{4}$$

pour $i\geqq 2$. Ici $A_1^0(x)$ se montre indépendante de x' qu'on désignera par

A_1^0. *De plus* $\bar{A}_1^1(x')$ *s'écrit de la forme* $A_1^1+\sum_1^n h_j x_j\cdot A_1^0$, *où* A_1^1 *designe une constante.* $\bar{A}_i^t(x')$ *désignent fonctions rationnelles de* x'. *Enfin* A_i^0, A_1^1 *et* $\bar{A}_i^t(x')$ *sont commutatives avec* A_1^0 *et donc diagonalisables à la fois. Elles sont déterminées à la manière unique.*

Corollaire. *L'equation* (1) *a une solution formelle de la forme suivante:*

$$
T(x)=S(x)\cdot\Gamma(x_1)^{h_1-1}\cdot\Gamma(x_1+(A_1^0)^{-1}\cdot A_1^1+\textstyle\sum_2^n h_j x_j)\cdot\exp(\sum_1^n x_j\log A_j^0), \tag{5}
$$

où $\Gamma(x_1)$ *désigne la fonction gamma et que* $S(x)$ *désigne la précédente. Celle-ci est uniquement determinée par un certain nombre* k *de ses premiers termes.*

Supposons A_1^0 et A_1^1 diagonales: $A_1^0=\mathrm{Diag.}[a_1, a_2, \cdots, a_m]$ et $A_1^1=\mathrm{Diag.}[a_1', a_2', \cdots, a_m']$ telles que l'on ait $|a_1|\geqq|a_2|\geqq\cdots\geqq|a_m|>0$. Alors d'après la méthode de G.D. Birkhoff le Corollaire précédent entraine

Théorème 2. *A l'hypothèse* (H, 1) *il existe une et une seule solution* $\Phi(x)$ *de* (1) *à valeurs dans* $GL(m, \boldsymbol{C})$ *qui est méromorphe dans* $\boldsymbol{C}^n$, *ayant la formule asymptotique* (5) *dans un domaine* Ω, *pour* $\mathrm{Re}\, x_1\to+\infty$ *ou* $-\infty$.

Soient B et N le sous-groupe triangulaire supérieure et celui unipotent maximal dans B réspectivement. Alors on a les dévelopments en fraction continue:

$$
\Phi(x)\bmod. N=\lim_{t\to+\infty} A_1(x)\cdot A_1(x-e_1)\cdots A_1(x-te_1)\cdot T_d(x-te_1)\bmod. N \tag{6}
$$

et

$$
\Phi(x)\bmod. B=\lim_{t\to+\infty} A_1(x)\cdot A_1(x-e_1)\cdots A_1(x-te_1)\qquad \bmod. B \tag{6$'$}
$$

réspectivement. $T_d(x)$ désigne la partie de premiers d termes de $T(x)$. On appèllera $\Phi(x)$ du Théorème 2 '*solution à la direction de l'abscisse* x_1'. Soient $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ des coordonnées de $\boldsymbol{C}^n$ telles que

$$
x_i=\textstyle\sum_1^n u_{ij}y_j \qquad (1\leqq i\leqq n) \tag{7}
$$

où $U=((u_{ij}))$ désigne une matrice unimodulaire. Supposons aussi que les coordonnées (y) satisfassent à (H, 1). On note par $\Phi^*(x)$ la solution correspondante à la direction de l'abscisse y_1. Dans cette situation on a

Théorème 3. *Si deux abscisses* x_1 *et* y_1 *sont génériques de sorte que l'on ait* i) $h_i^*=\sum_1^n h_j u_{ji}$, *où* h_j *et* h_i^* *désignent les degrés des fonctions* $A_j(x)$ *et* $A_i^*(y)=\Phi(U\cdot(y+e_i))\cdot\Phi(U\cdot y)^{-1}$ *réspectivement,* ii) $U^{-1}\Omega\cap\Omega$ *contienne un domaine fondamental du groupe de déplacement* $\boldsymbol{Z}^n$ *dans* $\boldsymbol{C}^n$ *et* iii) $|y_j/y_1|$ *y sont toutes bornées pour* $|y_1|\to\infty$ *ou* $|x_1|\to\infty$, *alors la matrice de connexion* $P_{y,x}=\Phi^*(x)\cdot\Phi(x)^{-1}$ *est une fonction rationnelle de* $\exp(2\pi\sqrt{-1}x_j)$ $(1\leqq j\leqq n)$. *Les matrices* $P_{y,x}$ *satisfont à la condition de compatibilité:*

$$
P_{z,y}\cdot P_{y,x}=P_{z,x} \tag{8}
$$

pour trois coordonnées x, y et z. Comme dans le cas d'une variable on peut poser la question suivante:

Problème de connexion. *Supposons qu'une suite de matrices* $P_{y,x}$ *associées à deux directions* x_1 *et* y_1 *soient données de sorte qu'elles satisfassent à* (8). *Est-ce-qu'il existe un cocycle* $\{A_i(x)\}$ *de* $H^1(\boldsymbol{Z}^n, GL(m, \boldsymbol{C}(x))$ *donnant les matrices* $P_{y,x}$ *comme 'matrice de connexion'*?

Dans le cas où m est égal à un, M. Sato a déterminé complètement la structure de $H^1(\boldsymbol{Z}^n, GL(1, \boldsymbol{C}(x))$ (voir [3]). Dans ce cas la solution de (1) est toujours réalisée moyennant la fonction gamma. Le problème de connexion est trivial vu la formule de Gauss de la fonction gamma.

Dans la partie suivante on donnera des exemples plus généraux.

Références

[1] G. D. Birkhoff: General theory of linear difference equations. Collected Mathematical Papers, **1**, 476–517 (1950).

[2] K. Okubo: Sur le problème de connexion (en japonais). Kokyuroku à R. I. M., **63**, 15–33 (1969).

[3] M. Sato: Theory of prehomogeneaous vector spaces (rédigé par T. Shintani) (en japonais). Sugakuno Ayumi, **15**, 85–157 (1970).