

## 123. Equations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes. II

### Evanouissement des hypercohomologies et exemples

Par Kazuhiko AOMOTO

Collège d'éducation générale Université de Tokyo

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., Oct. 12, 1974)

1. Soient  $P_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) polynômes irréductibles de degré  $l_j$  et  $S_j$  les hypersurfaces algébriques :  $P_j(x) = 0$  dans l'espace affine  $C^n$  respectivement. On désigne par  $S$  la réunion de  $S_j := \bigcup_1^m S_j$ . Soit  $\omega$  la forme rationnelle de l'expression suivante :  $= \sum_1^m \lambda_j dP_j / P_j$  qui donne une connexion de Gauss-Manin sur  $M = C^n - S$  définissant l'hypercohomologie  $H^*(M, \Omega^*(S))$  du complexe de De Rham  $\Omega^*(S)$  comme suit :

$$(1,1) \quad \longrightarrow \Omega^p(S) \xrightarrow{\nabla_\omega} \Omega^{p+1}(S) \longrightarrow$$

par la dérivée covariante  $\nabla_\omega \varphi : d\varphi + d\omega \wedge \varphi$ , où  $\varphi \in \Omega^p(S)$ . Ici  $\Omega^p(S)$  désigne l'ensemble de  $p$ -formes rationnelles dont les supports polaires sont tous contenus dans  $S$ . On désigne par  $\tilde{\Omega}^p = \bigwedge^p C[x]$  le  $C[x]$ -module de  $p$ -formes à coefficients polynômiaux. On note par  $H(\quad)$  la homogénéisation canonique d'un module ou d'un polynôme de  $C[x]$  dans  $C[x_0, x_1, \dots, x_n]$ . Posons la condition suivante pour les polynômes  $P_j$  :

(H,1,1) Soient  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$   $r$  polynômes différents quelconques d'entre les  $P_j$ . Alors le module homogène  $H(dQ_1 \wedge dQ_2 \wedge \dots \wedge dQ_r \wedge dx_j \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n, Q_1, \dots, Q_s)$  est de hauteur  $s + j - r$  dans  $H(\tilde{\Omega}^n)$  isomorphe à  $C[x_0, x_1, \dots, x_n]$  pour  $r \leq n, 0 \leq s \leq r$  et  $r + 1 \leq j \leq n + 1$ .

On désigne par  $\bar{P}$  la partie homogène de degré maximal d'un polynôme  $P$ . Posons la condition suivante pour les  $\bar{P}$  :

(H,1,2) Le module homogène  $(d\bar{Q}_1 \wedge d\bar{Q}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{Q}_r \wedge dx_j \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_s)$  est de hauteur  $s + j - r$  dans  $\tilde{\Omega}^n$  isomorphe à  $C[x]$  pour  $r \leq n - 1, r + 1 \leq j \leq n$  et  $0 \leq s \leq r$ .

On désigne par  $\hat{\Omega}^\cdot$  le sous-complexe de  $\Omega^\cdot(S)$  se composant de formes  $\varphi \in \hat{\Omega}^\cdot$  telles que  $\nabla_\omega(\varphi) \in \hat{\Omega}^\cdot$ . Soit  $\iota$  l'inclusion  $\hat{\Omega}^\cdot \rightarrow \Omega^\cdot(S)$ . Alors on a

**Théorème 1,1.** Aux hypothèses (H,1,1) et (H,1,2) l'homomorphisme naturel des hypercohomologies de De Rham par l'inclusion :

$$(1,2) \quad \iota : H^p(M, \hat{\Omega}^\cdot) \rightarrow H^p(M, \Omega^\cdot(S))$$

est l'isomorphisme pourvu que  $\lambda \in C^n - Z_+^n$  et  $p \neq n$ . De même on a l'isomorphisme sur  $C(\lambda)$  :

$$(1,3) \quad \iota : H^p(M, \hat{\Omega}^\cdot \otimes C(\lambda)) \simeq H^p(M, \Omega^\cdot(S) \otimes C(\lambda))$$

pourvu que  $p \neq n$ .

Supposons de plus que l'on ait

$$(H,1,3) \quad \tilde{\Omega}^n = P_1 \cdot P_2 \cdots P_m \left\{ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q} dP_{j_1}/P_{j_1} \wedge \dots \wedge dP_{j_q}/P_{j_q} \wedge \tilde{\Omega}^{n-q} \right\}.$$

Alors on a

**Théorème 1,2.** i)  $H^n(M, \hat{\Omega}^\bullet) \cong H^n(M, \Omega^\bullet(*S))$  si  $\lambda \in C^n - Z_+^n$ .

ii)  $H^n(M, \hat{\Omega}^\bullet \otimes C(\lambda)) \cong H^n(M, \Omega^\bullet(*S) \otimes C(\lambda))$ .

2. Soient  $\bar{S}_j: \bar{P}_j(x) = 0$  dans  $C^n$ . Soit  $\bar{S}$  la réunion de  $\bar{S}_j: \cup \bar{S}_j$ .

On désigne par  $\bar{V}$  la dérivée covariante  $\bar{V} = \bar{V}_\omega$  donnée par la forme  $\bar{\omega} = \sum \lambda_j d\bar{P}_j/\bar{P}_j$  dans  $\bar{M} = C^n - \bar{S}$ . On désigne aussi par  $\hat{\Omega}^\bullet$  le sous-complexe de  $\tilde{\Omega}^\bullet$  se composant de formes  $\varphi \in \tilde{\Omega}^\bullet$  telles que  $\bar{V}(\varphi) \in \hat{\Omega}^\bullet$ . Alors on a des théorèmes analogues aux précédents. Faisons maintenant l'hypothèse suivante:

(H,2,1)  $\sum_1^m \lambda_j l_j$  est différent des entiers.

Alors on a simplement

**Théorème 2,1.** i) A l'hypothèse de (H,2,1)  $H^p(\bar{M}, \hat{\Omega}^\bullet)$  et  $H^p(\bar{M}, \hat{\Omega}^\bullet \otimes C(\lambda))$  s'annulent pour  $p \neq n$ .

On a la relation fondamentale suivante des deux cohomologies précédentes:

**Lemme 2,1.** Il existe une suite spectrale  $\{E_i^{r,s}, \bar{V}\}$  où  $\sum_{-\infty < s < \infty} \oplus E_i^{q,s} = E_i^q$  du complexe filtré  $\{\hat{\Omega}^\bullet, \bar{V}\}$  telle que

$$(2,1) \quad \sum_{-\infty < q < \infty} \oplus E_1^q \cong H^*(\bar{M}, \hat{\Omega}^\bullet) \quad \text{et}$$

$$(2,2) \quad \sum_{-\infty < q < \infty} \oplus E_\infty^q \cong \text{Gr. } H^*(M, \hat{\Omega}^\bullet)$$

où  $\text{Gr. } H^*(M, \hat{\Omega}^\bullet)$  désigne l'anneau gradué de l'anneau filtré de  $H^*(M, \hat{\Omega}^\bullet)$ .

On a le même résultat sur  $C(\lambda)$ .

Théorème 2,1 et Lemme 2,1 impliquent le suivant:

**Théorème 2,2.** Aux hypothèses (H,1,1), (H,1,2), (H,1,3) et (H,2,1)  $H^p(M, \hat{\Omega}^\bullet)$  ainsi que  $H^p(M, \hat{\Omega}^\bullet \otimes C(\lambda))$  s'annulent pour  $p \neq n$ .  $H^n(M, \hat{\Omega}^\bullet)$  et  $H^n(M, \hat{\Omega}^\bullet \otimes C(\lambda))$  sont isomorphes à  $H^n(\bar{M}, \hat{\Omega}^\bullet)$  ou  $H^n(\bar{M}, \hat{\Omega}^\bullet \otimes C(\lambda))$  respectivement.

Quant aux dernières on a un théorème de structure:

**Théorème 2,3.** Soit  $\mathcal{I}$  le sous-module de  $\tilde{\Omega}^n$  engendré par les formes  $\bar{P}_1 \cdot \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_m \{d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{P}_{i_q}/\bar{P}_{i_q}\}$  où les indices  $i_1, i_2, \dots, i_q$  parcourent toutes les indices telles que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq m$  et  $1 \leq q \leq n-2$ , et par les formes  $\bar{P}_1 \cdot \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_m \{ \sum_1^m \lambda_j d\bar{P}_j/\bar{P}_j \} \wedge d\bar{P}_{i_1}/\bar{P}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{P}_{i_{n-1}}/\bar{P}_{i_{n-1}}$  où les indices  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$  parcourent toutes les indices telles que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq m$ . Alors on a des isomorphismes:

$$(2,3) \quad H^n(\bar{M}, \hat{\Omega}^\bullet) \cong \tilde{\Omega}^n / \mathcal{I},$$

$$(2,4) \quad H^n(\bar{M}, \hat{\Omega}^\bullet \otimes C(\lambda)) = C[x] \otimes C(\lambda) / \mathcal{I} \otimes C(\lambda).$$

3. On désigne par  $\tilde{\Omega}^p(h)$  (ou  $\bar{\Omega}^p(h)$ ) les sous-espaces de  $\tilde{\Omega}^p$  se composant de formes  $\varphi$  de degré polynômial au plus  $h-p$  (ou de degré polynômial homogène  $h-p$  respectivement). En vue de (H,1,2)  $\mathcal{I}$  est

un idéal de dimension nulle. On désigne  $\mathcal{I} \cap \bar{\Omega}^n(h+n)$  par  $\mathcal{I}(h)$ . Alors il existe un nombre entier  $N^*$  tel que  $\bar{\Omega}^n(h+n) = \mathcal{I}(h)$  pour  $h \geq N^*$  et que  $\bar{\Omega}^n/\mathcal{I} = \sum_0^{N^*-1} \bar{\Omega}^n(h+n)/\mathcal{I}(h)$  (voir [7]). On choisit un sous-espace  $\mathcal{K}(h)$  de  $\bar{\Omega}^n(h+n)$  tel que  $\bar{\Omega}^n(h+n)$  soit la somme directe de  $\mathcal{I}(h)$  et  $\mathcal{K}(h)$ . La somme  $\mathcal{K} = \sum_0^{N^*-1} \mathcal{K}(h)$  forme une base de  $\bar{\Omega}^n/\mathcal{I}$ .

Soit  $\varphi$  une forme quelconque de  $\mathcal{K}(h)$ . Alors  $\varphi/P_j$  est cohomologue à une somme  $\sum_0^r \psi(h)$  où  $r$  désigne  $N^*-1$ ,  $h-l_j$  ou  $N^*-l_j$  suivant que  $h \geq N^*+l_j$ ,  $N^*+l_j > h \geq N^*$  ou  $h < N^*$  respectivement et que  $\psi(h)$  désigne une forme de  $\mathcal{K}(h)$ .

**Théorème 3,1.** *Dans cette situation  $\lambda_j \prod_{t=h}^s (t-l_j+n + \sum_1^s \lambda_k l_k) \cdot \psi(h)$  sont polynômes de  $\lambda$ , où  $s$  désigne  $h-l_j$  ou  $N^*-l_j$  suivant que  $h \geq N^*$  ou  $h < N^*$ . On a un résultat analogue pour la forme  $P_j \cdot \varphi$ .*

On note par  $(\varphi_i, 1 \leq i \leq N)$  une base de  $H^n(M, \Omega \cdot (*S))$ . Alors le théorème précédent montre que  $P_j^{\pm 1} \cdot \varphi$  sont cohomologues aux combinaisons linéaires de  $\varphi_i$  de façon suivante :

$$(3,1) \quad P_j^{\pm 1} \cdot \varphi_i \sim \sum_1^N (A_{ki}^{(j)})^{\pm 1} \cdot \varphi_k,$$

où  $A^{(j)} = A_{ki}^{(j)}$  désignent matrices de fonctions rationnelles de  $\lambda$ . Soit  $\rho_i$  la représentation scalaire de  $\pi_1(M)$  dans  $C^*$  donnée par la connexion  $\omega$ , et soit  $S_\lambda$  le système local défini par  $\rho_i$  sur  $M$ . Le théorème de comparaison du à Grothendieck et Deligne dit que

$$(3,2) \quad H^*(M, \Omega \cdot (*S)) \cong H^*(M, S_\lambda)$$

d'où il vient que  $H_n(M, S_{-\lambda})$  est le dual de  $H^n(M, \Omega \cdot (*S))$  moyennant l'intégrale suivante :

$$(3,3) \quad \hat{\varphi}(\lambda) = \int_\gamma P_1^{\lambda_1} \cdot P_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot P_m^{\lambda_m} \cdot \varphi,$$

où  $\varphi \in \Omega^n(*S)$  et  $\gamma \in H_n(M, S_{-\lambda})$ . Soit  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$  la base de  $H_n(M, S_{-\lambda})$ . Alors

**Théorème 3,2.** *Les intégrales*

$$(3,4) \quad \hat{\varphi}_i(\lambda) = \int_{\gamma_k} P_1^{\lambda_1} \cdot P_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot P_m^{\lambda_m} \cdot \varphi_i$$

donnent la solution unique dans théorème 1,2 de I, pourvu que la fonction  $F = \sum_1^m n_j \log |P_j|$  soit non-dégénérée à tous ses points critiques dans  $M$ . Le nombre de ces points est égal à  $N$ . Ici  $n_j$  désignent des entiers.

**4. Exemple.** On suppose que  $m \geq n+1$  et que toutes les  $l_j$  soient égales à un. Soit  $\Omega_{\log}^p(*S)$  l'anneau de  $p$ -formes méromorphes munies de poles logarithmiques en  $S$ , autrement dit l'espace vectoriel engendré par  $p$ -formes  $\varphi_J = dP_{j_1}/P_{j_1} \wedge \dots \wedge dP_{j_p}/P_{j_p}$  où  $J$  désigne une suite des indices  $j_1, j_2, \dots, j_p$  telles que  $j_1 < j_2 < \dots < j_p$  (voir [4]). Alors on a

**Théorème 3,1.**  $H^n(M, \Omega \cdot (*S)) = \Omega_{\log}^n(*S) / \omega \wedge \Omega_{\log}^{n-1}(*S)$ .

Soit  $\hat{\varphi}(J; \lambda)$  l'intégrale de  $\varphi_J$  définie par (3,3). On désigne par  $[j_1, j_2, \dots, j_n]$  ou  $[j_0, j_1, \dots, j_n]$  les déterminants des matrices des coefficients de  $x_j$  de  $H(P_{j_q})$  pour  $1 \leq j \leq n, 1 \leq q \leq n$  ou bien  $0 \leq j \leq n, 0 \leq q \leq n$

respectivement. Alors les équations aux différences pour  $\hat{\phi}(J; \lambda)$  s'expriment de façon suivante :

$$(4,1) \quad \hat{\phi}(J; \lambda - (e_{j_1}) \cdot (\lambda_{j_1} - 1)) \\ = - \sum_0^n (-1)^{t+n} \sum_{j_0 \notin J} \frac{[j_0, j_2, \dots, j_n]}{[j_0, j_1, \dots, j_n]} \cdot \lambda_{j_0} \cdot \hat{\phi}((j_0) \cup J - (j_t); \lambda)$$

et pour  $j_0 \notin J$

$$(4,2) \quad \hat{\phi}(J; \lambda - e_{j_0}) = \frac{[j_1, j_2, \dots, j_n]}{[j_0, j_1, \dots, j_n]} \cdot \sum_1^n (-1)^t \cdot \hat{\phi}((j_0) \cup (J - j_t); \lambda).$$

Ces équations-ci vérifient (H,1) de I par le choix de coordonnées génériques. Elles peuvent être regardées comme une généralisation de la formule de récurrence de la fonction hypergéométrique de Gauss. Théorème 1,2 est une interprétation géométrique du résultat de I. H. Bernstein concernant équations aux différences (voir [3]).

### Références

- [ 1 ] K. Aomoto: Vanishing of cohomology attached to certain many valued meromorphic functions. Présenté au Jour. of Math. Soc. of Japan.
- [ 2 ] —: Equations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes. I. Proc. Japan Acad., **50**, 413–415 (1974).
- [ 3 ] I. H. Bernstein: La continuation analytique de fonctions généralisées par paramètres. Analyse Fonct., **6**(4), 26–40 (1972).
- [ 4 ] P. Deligne: Théorie de Hodge. II. Pub. Math., No. 40 (1971).
- [ 5 ] —: Equations différentielles à points réguliers singuliers. Lec. Notes in Math., **163**. Springer.
- [ 6 ] K. Saito: Regularity of Gauss-Manin connections of a flat family of isolated singularities. Quelques journées singulières, Ecole Polytechnique (1973).
- [ 7 ] J. P. Serre: Algèbre locale. Multiplicité, Lec. Notes, Springer, **11** (1965).