16. Über die Maximalordnung einiger Funktionen in der Idealtheorie.

Von Zyoiti SUETUNA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität, Tokyo.

(Eing. Dez. 22, 1925. Vorgel. von Teiji TAKAGI, M.I.A., Jan. 12, 1926)

In seiner Abhandlung, „Highly Composite Numbers" hat S. RAMANUJAN die Zerlegung der ganzen Zahlen in zwei Faktoren sehr eingehend untersucht.[1] Nach der analogen Methode habe ich die Maximalordnung einiger idealtheoretischer Funktionen bestimmt.[2]

Es sei $\mathfrak{K}$ ein algebraischer Körper k-ten Grades. $T_\kappa(\mathfrak{a})$ bezeichne die Anzahl der Darstellungen des Ideals $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{K}$ als Produkt von κ Idealfaktoren ($\kappa \geqq 2$) und $F(n)$ die Anzahl der Ideale in $\mathfrak{K}$ mit Norm n. Man setze

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1\sqrt{\log x}, & \text{im allgemeinen,} \\ c_2\sqrt{\log x \operatorname{loglog} x} & \text{falls } \mathfrak{K} \text{ speziell ein ABELscher Körper ist.}^{3)} \end{cases}$$

Dann gelten die folgenden Sätze :

Satz I ($k \geqq 1$, $\kappa \geqq 2$). 1) *Die Maximalordnung von* $T_\kappa(\mathfrak{a})$ *ist*

$$(1) \qquad = {}_\kappa Li(\log N(\mathfrak{a})) + O\left(\log N(\mathfrak{a}) e^{-\varphi(\log N(\mathfrak{a}))}\right).$$

2) *Es ist möglich, unendlich viele Ideale in* $\mathfrak{K}$: $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots$, $(1 < N(\mathfrak{a}_1) \leqq N(\mathfrak{a}_2) \leqq \cdots\cdots)$, *so auszuwählen, dass* 1. $N(\mathfrak{a}_n) \sim N(\mathfrak{a}_{n+1})$ *für* $n \to \infty$, *und* 2. $T_\kappa(\mathfrak{a}_n)$ *wirklich die Grössenordnung* (1) *erreicht.*

Satz II ($k \geqq 2$). 1) *Wenn* k^* *die Ordnung der GALOISschen Gruppe von* $\mathfrak{K}$ *bedeutet, so ist die Maximalordnung von* $F(n)$

1) Proc. London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 14 (1915), 347—409.

2) Näheres in Journ. Fac. Sci. Tokyo, Section I, 1 Part 3 (1925), 105—153.

3) Ich bezeichne mit $c_1, c_2, \ldots\ldots$ nur von k abhängige positive Konstanten und mit $b_1, b_2, \ldots\ldots$ von $\mathfrak{K}$ abhängige positive Konstanten.

$$(2) \qquad -k^{\frac{1}{k^*}} Li(k^* \log n) + O\left(\log n \, e^{-\varphi(k^* \log n)}\right).$$

2) *Hier ist auch möglich, unendlich viele ganze Zahlen* $N, N_2, \cdots\cdots$ $(1 < N_1 < N_2 < \cdots\cdots)$ *so auszuwählen, dass* 1. $N_n \sim N_{n+1}$, *für* $n \to \infty$, *und* 2. $F(N_n)$ *wirklich die Grössenordnung* (2) *erreicht.*

Bekanntlich haben wir, für $x \to \infty$,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqq x}' T_k(n) \sim c_3 (\log x)^{k-1}, \quad \frac{1}{x} \sum_{n \leqq x}' F(n) \sim b_1.$$

Wenn wir diese Mittelwerte mit den Maximalordnungen (1) (für $k=1$, $\varkappa=k$) und (2) vergleichen, so ist der Unterschied sehr bemerkenswert. Der Grund liegt vielleicht darin, dass $F(n)$ immer wieder verschwindet. In der Tat kann ich beweisen den

Satz III. *Wir nehmen die Richtigkeit der folgenden Vermutung an: Man setze* $(\sigma > 1)$

$$f(s) = \sum_{\varpi}' \frac{1}{\varpi^s},$$

wo ϖ *eine in die Diskriminante von* $\mathfrak{K}$ *nicht aufgehende rationale Primzahl bedeutet, welche zugleich Norm eines gewissen Primideals in* $\mathfrak{K}$ *ist. Dann gibt es drei positive Konstanten* b_2, b_3 *und* $b_3^* = b_3^*(\mathfrak{K}, \varepsilon)$ *derart, dass in dem längs der Strecke von* ϑ *nach* 1 *aufgeschlitzten Gebiete*

$$\sigma \geqq 1 - \frac{b_2}{\log|t|} \; (|t| \geqq b_3), \quad \sigma \geqq \vartheta = 1 - \frac{b_2}{\log b_3} > \frac{1}{2} \; (|t| \leqq b_3)$$

$f(s)$ *regulär ist und für*

$$\sigma \geqq 1 - \frac{b_2}{\log|t|} \qquad (|t| \geqq b_3^*)$$

die Relation

$$|f(s)| < \varepsilon \log|t| \qquad \textit{für jedes } \varepsilon > 0$$

erfüllt.

Es sei k^* *die Ordnung der* GALOIS*schen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{K}$ *und* λ *die Anzahl der Elemente von* $\mathfrak{G}$, *welche wenigstens ein Symbol nicht versetzen*:

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{\lambda}{k^*} \leqq \frac{k^* - k + 1}{k^*}.$$

Dann behaupte ich:

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ F(n) \neq 0}}' 1 \sim \frac{b_4 x}{(\log x)^{1-\frac{\lambda}{k^*}}} \qquad \textit{für } x \to \infty.$$

Die obige Vermutung ist gewiss richtig, wenn $\mathfrak{K}$ ein GALOISscher Körper ist. Für einen nicht-GALOISschen Körper $\mathfrak{K}$ ist sie auch dann richtig, wenn die Ordnung jedes Elementes von $\mathfrak{G}$ eine Primzahl ist (ARTIN, TAKAGI).

Satz I und Satz II (wenigstens für einen *Galois*schen Körper) können noch weit verschärft werden unter Annahme der Richtigkeit der verallgemeinerten RIEMANNschen Vermutung über die Nullstellen von $\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$.

Math. Institut, Univ. Tokyo ; Dez., 1925.