12. *Sur les Zéros des Sommes Partielles d'une Série Entière.*

Par Yôiti YOSIDA.
Daiiti Kôtô Gakkô, Tokyo.

(Reç. Jan. 17, 1927. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1927.)

1. Le théorème suivant est dû à M. Tsuji.[1]
Soit ρ_n le module maximum des zéros du polynôme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_0 \neq 0),$$

somme partielle, c'est-à-dire la somme des n premiers termes, de la série entière $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$. Pour que $f(x)$ soit une fonction entière d'ordre ρ, il faut et il suffit que

$$(1) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\log \rho_n} = \rho.$$

Nous allons préciser ce théorème en tenant compte de la classification de M. Lindelöf,[2] suivant laquelle une fonction entière d'order ρ, $f(x)$, est dite

i) du type minimum, si $\displaystyle\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} = 0$; et

ii) du type moyen, si $\displaystyle 0 < \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\rho} < \infty$; et

iii) du type maximum, si $\displaystyle\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\rho} = \infty$,

$M(r)$ étant le module maximum de $f(x)$ pour $|x| = r$.

2. Montrons, au préalable, que *si*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\rho_n{}^\rho} = C,$$

on a

$$(2) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}}\; n\,|a_n|^{\frac{\rho}{n}} \leqq C e^{\rho+1}.$$

---

1) Japanese Journal of Mathematics, 3 (1926), 49.
2) *cf.* Valiron, Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable, 7.

Soit, en effet,

$$\frac{n}{\rho_n^{\rho}} < C',$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho_n} < \left(\frac{C'}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0 \,,$$

où C' est un nombre quelconque supérieur à C. Prenons M assez grand pour que

$$(4) \qquad |a_k| < M \frac{C'^{\frac{k}{\rho}} e^k}{(k\,!)^{\frac{1}{\rho}}} \quad \text{pour} \quad k = 1,2,3,\cdots\cdots,n_0-1.$$ [1]

En supposant que l'inégalité (4) soit vérifiée pour $k<n$, montrons qu'elle le sera pour $k = n$ aussi. ρ_n étant le module d'une racine de l'équation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_0 = 0,$$

il satisfait à l'inégalité

$$|a_n| \leqq \frac{|a_{n-1}|}{\rho_n} + \frac{|a_{n-2}|}{\rho_n^2} + \cdots\cdots + \frac{|a_0|}{\rho_n^n}.$$

D'après (3) et (4),

$$|a_n| \leqq M \frac{C'^{\frac{n-1}{\rho}} e^{n-1}}{(n-1)\,!^{\frac{1}{\rho}}} \left(\frac{C'}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}} + M \frac{C'^{\frac{n-2}{\rho}} e^{n-2}}{(n-2)\,!^{\frac{1}{\rho}}} \left(\frac{C'}{n}\right)^{\frac{2}{\rho}} + \cdots\cdots M\left(\frac{C'}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}$$

$$< \frac{M C'^{\frac{n}{\rho}}}{n\,!^{\frac{1}{\rho}}} \,(e^{n-1} + e^{n-2} + \cdots\cdots + 1),$$

d'où

$$|a_n| < \frac{M C'^{\frac{n}{\rho}} e^n}{(n\,!)^{\frac{1}{\rho}}},$$

l'inégalité ayant lieu pour toute valeur de n. Moyennant la formule de Stirling :

$$n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} < n\,!\; D,$$

où D est une constante, on a

1) *cf.* Tsuji, *l.c.*, 50.

$$|a_n| < M C'^{-\frac{n}{\rho}} e^n \left(\frac{D}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{1}{\rho}} e^{\frac{n}{\rho}} n^{-\frac{n+\frac{1}{2}}{\rho}},$$

$$n\,|a_n|^{\frac{\rho}{n}} < M^{\frac{\rho}{n}} C' e^{\rho+1} n^{\frac{1}{2n}} \left(\frac{D}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\ n\,|a_n|^{\frac{\rho}{n}} \leqq C' e^{+1}.$$

Mais C' n' est sujet qu'à la condition qu'il soit plus grand que C, donc

$$\overline{\lim_{n-\infty}}\ n\,|a_n|^{\frac{\rho}{n}} \leqq C e^{\rho+1}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Réciproquement, *si*

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\ n\,|a_n|^{\frac{\rho}{n}} = K,$$

on a

$$(5) \qquad K e^{-(\rho+1)} \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\rho_n{}^{\rho}} \leqq K.$$

La première inégalité se démontre immédiatement. Si l'on avait, en effet,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\rho_n{}^{\rho}} < K e^{-(\rho+1)},$$

on aurait, d'après (2), où l'on a posé $C < K e^{-(\rho+1)}$,

$$\overline{\lim_{n=}}\ n\,|a_n|^{\frac{\rho}{n}} < K,$$

contrairement à l'hypothèse.

Pour démontrer la seconde on a, en désignant par ε un nombre positif quelconque,

$$n\,|a_n|^{\frac{\rho}{n}} < K+\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|a_n| < \left(\frac{K+\varepsilon}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} \qquad \text{pour} \qquad n \geqq n_0.$$

Si l'on désigne par

$$(6) \qquad \alpha_1^{(n)},\ \alpha_2^{(n)}, \cdots\cdots,\ \alpha_n^{(n)}$$

les zéros de l'équation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$|a_1^{(n)} a_2^{(n)} \cdots a_n^{(n)}|$ est égal à $\dfrac{|a_0|}{|a_n|}$. ρ_n étant le plus grand des modules de (6),

$$\rho_n^n \geqq \frac{|a_0|}{|a_n|} > |a_0| \left(\frac{n}{K+\varepsilon} \right)^{\frac{n}{\rho}},$$

$$\frac{n}{\rho_n^n} < \frac{K+\varepsilon}{|a_n|^{\frac{\rho}{n}}}.$$

Or, ε est un nombre positif quelconque, par suite

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\rho_n^\rho} \leqq K, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque.—Au moyen de la seconde inégalité (5), l'on peut préciser l'inégalité (2) comme il suit:

Si

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\rho^\rho} = C,$$

on a

$$(2') \qquad C \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} \; n\,|a_n|^{\frac{\rho}{n}} \leqq C\,e^{\rho+1},$$

M. Lindelöf[1] a montré que si

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\rho} = A,$$

on a toujours

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\rho e} |a_n|^{\frac{\rho}{n}} = A.$$

En posant $K = \rho e A$, on voit facilement:

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit une fonction entière d'ordre ρ et (i) *du type minimum, ou* (ii) *du type moyen, ou* (iii) *du type maximum, est que*

(i) $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \dfrac{n}{\rho_n^\rho} = 0$, *la condition* (1) *étant réalisée; ou* (ii) $0 < \overline{\lim\limits_{n=\infty}} \dfrac{n}{\rho_n^\rho} < \infty$; *ou* (iii) $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \dfrac{n}{\rho_n^\rho} = \infty$, *la condition* (1) *étant réalisée.*[2]

Ce résultat est parfaitement parallèle à celui de M. Lindelöf[3] relatif aux zéros de la fonction *elle-même* dans le cas où ρ est non entier.

1) *cf.* Valiron, *l.c.* 7.

2) *cf.* Y. Okada, Note on Power Series, Science Reports of the Tôhoku Imperial University, **11** (1922) 49.

3) *cf.* Valiron, *l. c.*, 26.

3. Considérons le cas où $f(x)$ est à croissance régulière, c'est-à dire que

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \rho.$$

Si l'on peut trouver une suite d'indices $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_p, \cdots\cdots$ *telle que*

$$\lim_{p=\infty} \frac{\log n_p}{\log \rho_{n_p}} = \rho, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\log n_{p+1}}{\log n_p} = 1,$$

la fonction entière $f(x)$ *d'ordre* ρ *est à croissance régulière.*

En raisonnant comme au numéro précédent, nous avons

$$\rho_{n_p}^{n_p} \geqq \frac{|a_0|}{|a_{n_p}|},$$

$$-\log|a_{n_p}| \leqq n_p \log \rho_{n_p} - \log|a_0|.$$

Or, par pypothèse,

$$\frac{\log n_p}{\log \rho_{n_p}} = \rho + \varepsilon_p, \quad \lim_{p=\infty} \varepsilon_p = 0.$$

Donc

$$-\frac{\log|a_{n_p}|}{n_p \log n_p} \leqq \frac{1}{\rho+\varepsilon_p} - \frac{\log|a_0|}{n_p \log n_p},$$

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{-\log|a_{n_p}|}{n_p \log n_p} \leqq \rho.$$

Mais $f(x)$ étant d'ordre ρ, on a

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|a_n|}{n \log n} = \frac{1}{\rho}.$$

Ainsi

$$\lim_{p=\infty} \frac{-\log|a_{n_p}|}{n_p \log n_p} = \frac{1}{\rho}, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\log n_{p+1}}{\log n_p} = 1,$$

ce qui est, d'après M. Lindelöf,[1] la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ d'ordre ρ soit à croissance régulière.

Ce résultat est parallèle à celui de M. Borel,[2] selon lequel $f(x)$ est d'ordre ρ non entier et à croissance régulière, si

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\log r_n} = \rho,$$

où $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n, \cdots\cdots$ sont la suite des modules des zéros de la fonction $f(x)$ *elle-même* rangés dans leur ordre de grandeur. Mais la réciproque de notre théorème ne semble pas être vraie, contrairement au cas de M. Boral.

1) *cf.* Valiron, *l. c.*, 8.

2) Borel, Lecons sur les fonctions entières, 110.