56. *Ueber die Maximalordnung einiger Funktionen in der Idealtheorie.*

(III. Mitteilung)

Von Zyoiti SUETUNA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität, Tokyo.

(Rec. March 30, 1927. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1927.)

In meinen früheren Arbeiten unter obigem Titel[1] habe ich die Maximalordnung einiger wichtiger ideal- und zahlentheoretischer Funktionen untersucht. Darüber sollen jetzt einige Bemerkungen gemacht werden.[2]

Die in der ersten Mitteilung angegebene Maximalordnung von $F_k(n)$ (Anzahl der Ideale mit Norm n in einem algebraischen Körper k-ten Grades, $\mathfrak{K}$) kann nun folgendermassen verschärft werden:

$\mathfrak{G}$ sei die *Galois*sche Gruppe von $\mathfrak{K}$, und k^* die Ordnung von $\mathfrak{G}$, d.h. der Grad des aus $\mathfrak{K}$ und seinen konjugierten zusammengesetzten Körpers $\mathfrak{K}^*$. Ferner sei G ein Element aus $\mathfrak{G}$, und $E(G)$ die Anzahl der Symbole, die durch G gar nicht versetzt werden. Ich bezeichne mit $\varkappa$ das Maximum von $E(G)$ für Nicht-Einheitselemente aus $\mathfrak{G}$: $\varkappa \leqq k-2$. Man setze

$$\lambda = \frac{\log \frac{k+1}{2}}{\log k}, \quad \lambda^* = \frac{\log \varkappa}{\log k}, \quad \lambda' = \frac{\log \frac{k+2}{3}}{\log k}.$$

Ueber die Nullstellen der Zetafunktion von $\mathfrak{K}^*$ (nicht von $\mathfrak{K}$) nehme ich an:

$$\text{(A)} \qquad \zeta_{\mathfrak{K}^*}(s) \neq 0 \quad \textit{für} \quad \Re(s) > \sigma_0,$$

wo

$$\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 < \text{Max.}\ (\lambda, \lambda^*).$$

1) Journ. Fac. Sci. Tokyo, Sec. I, Vol. I, Part 3 (1925), 105—153 und Part 6 (1926), 249—283. Vergl. auch meine Noten unter demselben Titel in diesen Proc. 2 (1926) 43—45 und 463—465.

Um ein ebenso scharfes Resultat, wie im Falle des schon in der ersten Arbeit erledigten *Galois*schen Körpers ($k=k^*$), zu erzielen, werde ich eventuell noch eine weitere Annahme machen. Nach dem *Takagi*schen Reziprozitätsgesetz hat *Artin* gezeigt, dass, wenn die Ordnung jedes Elementes von $\mathfrak{G}$ eine Primzahl ist,

$$\sum_{p \leqq x} 1 = \frac{h}{k^*} Li\,(x) + O\left(x e^{-\varphi(x)}\right) \qquad (\varphi(x) = c_1 \sqrt{\log x})\,,$$

wo p die zu einer Klasse $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ gehörigen Primzahlen durchläuft, und h die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{C}$ bedeutet. *Wenn also π die zu den durch G mit $E(G)=\varkappa$ erzeugten Klassen gehörigen Primzahlen durchläuft, so haben wir*

$$\text{(B)} \qquad \sum_{\pi \leqq x} 1 = \frac{k'}{k^*} Li\,(x) + O\left(x e^{-\varphi(x)}\right),$$

wo k' die Anzahl der Elemente G mit $E(G)=\varkappa$ bedeutet. Wir werden eventuell die allgemeine Gültigkeit von (B) annehmen. Dann gilt der

Satz I. *Unter der Annahme* (*A*) *ist die Maximalordnung von $F_k\,(n)$*

$$= k^{\frac{1}{k^*}\left(Li\,(k^* \log n) + \Phi\,(k^* \log n)\right)}\,,$$

wo 1) *für* $\varkappa < \frac{k+1}{2}$, *d.h.* $\lambda^* < \lambda$, *wie im Falle des Galoisschen Körpers,*

$$\Phi(x) = \lambda \Lambda(x^{\lambda}) + O\left(\frac{x^{\eta}}{\log^{\alpha} x}\right)$$

mit

$$\eta = \text{Max.}(\lambda^*,\ \lambda',\ \sigma_0), \qquad \alpha = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \qquad \textit{für} \quad \lambda^* \gtreqless \eta,$$

und 2) *für* $\varkappa \geqq \frac{k+1}{2}$, *d.h.* $\lambda^* \geqq \lambda$,

$$\Phi(x) = k' \lambda^* \Lambda(x^{\lambda^*}) + \lambda \Lambda(x^{\lambda}) + O\left(x^{\lambda^*} e^{-\varphi(x)}\right),$$

wenn, zugleich mit (*A*), *die allgemeine Gültigkeit von* (*B*) *angenommen wird.*

---

2) Näheres wird demnächst in Journ. Fac. Sci. Tokyo, Sec. I, Vol. I, Part 9 erscheinen.

In der zweiten Mitteilung habe ich ja die Maximal- und Minimalordnung der Anzahl $Q_\sigma(n)$ aller Darstellungen von n als Summe von 2σ Quadraten bestimmt. Bekanntlich ist die Anzahl $\breve{Q}_\sigma(n)$ der Darstellungen von n als Summe von $2\sigma+1$ Quadraten sehr viel komplizierter als $Q_\sigma(n)$, und hier kann ich nur erledigen den folgenden

Satz II. *Es sei σ ganz $\geqq 2$. Man setze*

$$\breve{C}(\sigma)=\frac{2^{2\sigma}\pi^{\sigma+\frac{1}{2}}}{(2^{2\sigma}-1)\,\Gamma(\sigma+\frac{1}{2})\,\zeta(2\sigma)}=\frac{\sigma!\,2^{2\sigma+1}}{\pi^{\sigma}(2^{2\sigma}-1)\,|B_{2\sigma}|}$$

1) *Dann ist*

$$C^*(\sigma)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\breve{Q}_\sigma(n)}{\breve{C}(\sigma)n^{\sigma-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{2^{2\sigma}}\right)\zeta(\sigma) & \textit{für}\quad \sigma\equiv 1,\,2 \pmod 4\\[2ex] \left(1-\dfrac{1}{2^{\sigma}}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^{\sigma}}+\dfrac{1}{2^{2\sigma-1}}\right)\zeta(\sigma) & \textit{für}\quad \sigma\equiv 3,\,0 \pmod 4,\end{cases}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\breve{Q}_\sigma(n)}{(\breve{C}\sigma)n^{\sigma-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{2^{\sigma}}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^{\sigma}}-\dfrac{1}{2^{2\sigma-1}}\right)\dfrac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(\sigma)} & \textit{für}\ \sigma\equiv 1,\,2 \pmod 4\\[2ex] \left(1-\dfrac{1}{2^{2\sigma}}\right)\dfrac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(\sigma)} & \textit{für}\ \sigma\equiv 3,\,0 \pmod 4.\end{cases}$$

2) *Für* $\sigma\equiv 0 \pmod 4$ *ist die Maximalordnung von* $\breve{Q}_\sigma(n)$

$$=C^*(\sigma)\breve{C}(\sigma)\,n^{\sigma-\frac{1}{2}}\left(1+O(n^{-\frac{\sigma}{2}+\frac{3}{4}})\right),$$

und für $\sigma\not\equiv 0 \pmod 4$ *gibt es, für jedes* $\varepsilon>0$, *ein positives* $A=A(\sigma,\varepsilon)$, *derart, dass* (*für alle grossen* n)

$$\breve{Q}_\sigma(n)<C^*(\sigma)\breve{C}(\sigma)\,n^{\sigma-\frac{1}{2}}\left(1-A\,n^{-\frac{\sigma}{2\sqrt{e}}-\varepsilon}\right).$$

Das *Hauptglied* von $\breve{Q}_\sigma(n)$, für $\sigma \geqq 2$, kann ebenso, wie das von $Q_\sigma(n)$, nach *Hardy*,[3] in eine Produktform transformiert werden. Diese Produktform ist aber so kompliziert, dass die früher vielfach benutzte *Ramanujan*sche Methode hier nicht anwendbar ist ; und ein ebenso scharfes Resultat, wie im Falle von $Q_\sigma(n)$, kann ich nicht herleiten.

In der ausführlichen Mitteilung *l.c.* 2), werde ich noch zeigen, dass alle unter der Annahme der *Riemann*schen Vermutung angegebenen Restabschätzungen in der zweiten Mitteilung jetzt verbessert werden können ; insbesondere ergibt sich, dass die Maximalordnung von $S_\varkappa(\mathfrak{a})$ (Summe der $\varkappa$ -ten Potenzen der Normen aller Idealfaktoren eines Ideals $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{K}$), nicht nur für $\varkappa > \frac{1}{2}$, sondern sogar für $\varkappa \geqq \frac{1}{2}$, *asymptotisch* (unter der Annahme $\zeta_{\mathfrak{K}}(s) \neq 0$ für $\Re(s) > \frac{1}{2}$) abgeschätzt werden kann.

---

3) *G. H. Hardy*, "On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five " Transa. Amer. Math. Soc. **21** (1920), 255—284.