136. *Zur konformen Flächentheorie mit Krümmungskugeln als Elementen I.*

By Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Rec. Sept. 14, 1928. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 2, 1928.)

1. Einleitung. Die Theorie der Zentralkugelkongruenzen hat Herr G. Thomsen[1] aufgestellt. Die Theorie der allgemeinen Kugelkongruenzen im konformen Raume habe ich begründet[2]. Dabei war der Fall ($\mathscr{G}=0$) von Krümmungskugelkongruenzen ausgeschlossen. Im folgenden möchte ich diesen Ausnahmefall behandeln[3], der *einen* Fundamentalsatz der konformen Flächentheorie liefert.

2. Hilfsformeln. Es sei

$$(1)\qquad \mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u^1, u^2), \quad ((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5=0)$$

eine Fläche und

$$(2)\qquad x=x(u^1, u^2), \quad ((xx)_5=1)$$

eine von den beiden Krümmungskugeln in $\mathfrak{x}$. Es sei ferner $\mathfrak{q}(u^1, u^2)$ der von $\mathfrak{x}$ verschiedene Schnittpunkt von den drei Kugeln x, x_1, x_2 ($x_1=\dfrac{\partial x}{\partial u^1}$ usw.) $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{q}$ seien so normiert, dass

$$(3)\qquad \boxed{(\mathfrak{x}\mathfrak{q})_5=2k^2 \text{ (konst.)}} \qquad \text{gilt.}$$

Im folgenden wollen wir die fünf Vektoren $\mathfrak{x}$, x, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{q}$ als die Grundvektoren einnehmen. Weiter soll die quadratische Form

$$(4)\qquad \boxed{ds^2=(\mathfrak{x}_h\mathfrak{x}_k)_5du^hdu^k=G_{hk}du^hdu^k}$$

die Rolle der Grundform der Tensorrechnung spielen. Im übrigen setzen wir

$$(5)\qquad \boxed{\begin{array}{l} G=G_{11}G_{22}-G_{12}^2, \quad D_r^{\ l}=G^{ls}D_{rs} \text{ usw.,} \\ E^{11}=E^{22}=0, \quad E^{12}=G^{-\frac{1}{2}}=-E^{21}, \\ G^{hk}=E^{hp}E^{kq}G_{pq}, \quad M_r=-(\mathfrak{q}x_r)_5=(\mathfrak{q}_r x)_5, \\ A_{hk}=(\mathfrak{x}_h\mathfrak{q}_k)_5, \quad D_{hk}=-(\mathfrak{x}_h x_k)_5=-(\mathfrak{x}_h x_k)_5=(x_{hk}\mathfrak{x})_5, \\ A=A_{11}A_{22}-A_{12}^2, \quad D=D_{11}D_{22}-D_{12}^2, \\ \mathscr{G}_{hk}=(x_h x_k)_5, \quad \mathscr{G}=\mathscr{G}_{11}\mathscr{G}_{22}-\mathscr{G}_{12}^2. \end{array}}$$

1) G. Thomsen, Über konforme Geometrie I. Abhandl. aus dem math. Sem. der Hamburgischen Universität, **2** (1923).
2) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, II. Science Reports of the Tohoku Imperial University, Series I. **17** (1928).
3) Diese Arbeit soll also eine Ergänzung zum Art. 140 der unter 2) zitierten Arbeit bilden.

Hierbei nehmen wir an[1]:

$$(6) \qquad G \neq 0.$$

3. Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass* $\varkappa(u^1, u^2)$ *eine von den beiden Krümmungskugeln in* $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ *sei, besteht darin, dass*

$$(7) \qquad \boxed{\mathfrak{g}=0}$$

gilt, vorausgesetzt, dass $G \neq 0$ *ist*[2].

Beweis. Ist $\eta(u^1, u^2)$, $((\eta\eta)_5=1)$ die Zentralkugel in $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$, $\varkappa'(u^1, u^2)$ die von $\varkappa$ verschiedene Krümmungskugel in $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$, so besteht:

$$(8) \qquad \boxed{\eta=\frac{1}{2}(\varkappa+\varkappa).}$$

Es sei weiter $\mathfrak{x}=\hat{\mathfrak{x}}$ wie folgt normiert:

$$(9) \qquad \boxed{\hat{\mathfrak{x}}=\frac{1}{2}(\varkappa-\varkappa').}$$

Dann ist

$$(10) \qquad \boxed{\varkappa=\eta+\hat{\mathfrak{x}}.}$$

Nach (10) haben wir

$$(11) \qquad \mathfrak{g}_{hk}=(\eta_h\eta_k)_5+(\eta_h\hat{\mathfrak{x}}_k)_5+(\eta_k\hat{\mathfrak{x}}_h)_5+\hat{G}_{hk}.$$

Nun ist[3]

$$(12) \qquad \boxed{\hat{\mathfrak{g}}_{hk}=(\eta_h\eta_k)_5=\hat{G}_{hk}.}$$

Deshalb aus (11) ergibt sich

$$(13) \qquad \boxed{\mathfrak{g}=\hat{\mathfrak{g}}+\hat{D}-\hat{\mathfrak{g}}^{hk}\hat{D}_{hk},}$$

wobei

$$\hat{\mathfrak{g}}=\hat{\mathfrak{g}}_{11}\hat{\mathfrak{g}}_{22}-\hat{\mathfrak{g}}_{12}^2, \quad \hat{D}_{hk}=-(\eta_h\hat{\mathfrak{x}}_k)_5,$$
$$\hat{D}=\hat{D}_{11}\hat{D}_{22}-\hat{D}_{12}^2, \quad \hat{\mathfrak{g}}^{hk}=\frac{1}{\hat{\mathfrak{g}}}\frac{\partial\hat{\mathfrak{g}}}{\partial\hat{\mathfrak{g}}_{hk}}$$

ist. Nun ist[4]

$$(14) \qquad \boxed{\hat{\mathfrak{g}}+\hat{D}=0, \quad \hat{\mathfrak{g}}^{hk}\hat{D}_{hk}=0.}$$

Folglich besteht (7).

Umgekehrt, (7) entspricht eine Krümmungskugel. In der Tat wird jede Tangentialkugel in $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ für passendes ρ in der Form

---

1) In der Tat $G=0$ liefert keine reelle Fläche.

2) Diesen Satz hat Herr G. Thomsen schon bemerkt, loc. cit. Da fehlte es den Beweis.

3) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, II, loc. cit., Formel (1008), S. 547.

4) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, II, loc. cit., Formel (1022), S. 549; Formel (1010), S. 547.

$$\xi=\eta+\rho\cdot\hat{\mathfrak{x}}$$

gegeben. Dann ist

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{22}-\mathfrak{G}_{12}^2=(1+\rho^2)^2\hat{\mathfrak{G}}+4\rho^2\hat{D},\quad \mathfrak{G}_{hk}=(\xi_h\xi_k)_5$$

oder

$$\mathfrak{G}=(1-\rho^2)^2\hat{\mathfrak{G}}=(1-\rho^2)^2\hat{G}.$$

Ist $\mathfrak{G}=0$, $\hat{G}\neq0$, so muss $\rho=\pm1$ sein, sodass ξ eine von den beiden Krümmungskugeln $\eta\pm\hat{\mathfrak{x}}$ wird.

4. Ableitungsgleichungen. Es beweist sich leicht, dass die Ableitungsgleichungen

$$(15)\quad \boxed{\begin{aligned}&\mathfrak{x}_{hk}=-\frac{A_{hk}}{2k^2}\mathfrak{x}+D_{hk}\varkappa-\frac{G_{hk}}{2k^2}\mathfrak{q},\\ &\varkappa_r=-\frac{M_r}{2k^2}\mathfrak{x}-D_r{}^l\mathfrak{x}_l,\\ &\mathfrak{q}_r=A_r{}^l\mathfrak{x}_l+M_r\varkappa\end{aligned}}$$

gelten[2], die *gegenüber der Umnormierung*

$$\mathfrak{x}^*=\omega\mathfrak{x},\quad \mathfrak{q}^*=\omega^{-1}\mathfrak{q}$$

invariant sind.

5. Hilfssatz. *Für allgemeine Kugelkongruenz* $\xi(u^1, u^2)$ *gilt:*

$$(16)\quad \boxed{\mathfrak{G}G=D^2,}$$

wobei $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{22}-\mathfrak{G}_{12}^2$, $D=D_{11}D_{22}-D_{12}^2$, $\mathfrak{G}_{hk}=(\xi_h\xi_k)_5$, $D_{hk}=(\xi_{hk}\mathfrak{x})_5$ *ist.*

Beweis. Nach $(15)_2$ unter der Fussnote 2) gilt:

$$\xi_r=-\frac{M_r}{2k^2}\mathfrak{x}-D_r{}^l\mathfrak{x}_l,\quad (M_r=-(\mathfrak{q}\xi_r)_5).$$

Hieraus ergibt sich

$$(17)\quad \mathfrak{G}_{rs}=D_r{}^lD_s{}^pG_{lp},$$

welches mit

$$(18)\quad \mathfrak{G}_{rs}=HD_{rs}-KG_{rs},\quad (K=D{:}G,\ H=\frac{1}{2}G^{hk}D_{hk})$$

äquivalent ist. Aus (18) ergibt sich (16) ohne weiteres.

Satz. *Für reelle Krümmungskugelkongruenzen ist es notwendig und hinreichend, dass*

$$(19)\quad \boxed{D=0}\quad \textit{gilt.}$$

Dieser Satz folgt aus Art. 3 und Formel (16).

6. Integrabilitätsbedingungen von (15), Fundamentalsatz I der Theorie von Krümmungskugelkongruenzen. Die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (15) lauten invariant geschrieben wie folgt:

---

2) (15) gelten nicht nur für $\varkappa$, sondern auch für allgemeine ξ. Vgl. T. Takasu, Differentialkugelgeometie, II, loc. cit., Formel (557), S. 373.

$$(20)\quad \boxed{\begin{array}{l} E^{kl}\mathfrak{x}_{hkl}=K^G E_{th}G^{mt}\mathfrak{x}_m\,, \\ E^{hk}x_{hk}=0, \quad E^{hk}\mathfrak{q}_{hk}=0, \end{array}}$$

wobei K^G die *Gausssche Krümmung der Grundform* $G_{hk}du^h du^k$ ist. Aus $(20)_1$ ergibt sich

$$(21)\quad \boxed{K^G=\frac{1}{2k^2}G^{hk}A_{hk}\,,} \qquad (22)\quad E^{kl}(A_{hkl}+D_{hk}M_l)=0,$$

$$(23)\quad E^{kl}(D_{hkl}-\frac{1}{2k^2}G_{hk}M_l)=0.$$

Aus $(20)_2$ ergibt sich :

$$(24)\quad E^{kl}(M_{kl}-D_k^{\ s}A_{sl})=0, \qquad (25)\quad \frac{1}{2k^2}E^{ks}M_k+E^{kl}D_{kl}^{\ s}=0,$$

$$(26)\quad E^{kl}D_k^{\ s}D_{sl}=0, \qquad (27)\quad E^{kl}D_k^{\ s}G_{sl}=0.$$

Aus $(20)_3$ ergibt sich :

$$(28)\quad E^{kl}(A_{kl}^{\ s}-M_kD_l^{\ s})=0, \qquad (29)\quad E^{kl}(-A_{ls}A_k^{\ s}-M_lM_k)=0,$$

$$(30)\quad E^{kl}(D_{ls}A_k^{\ s}+M_{kl})=0, \qquad (31)\quad E^{kl}A_k^{\ s}G_{ls}=0.$$

(26), (27), (29) und (31) werden Identitäten. (28), (25) und (30) sind bezw. in (22), (23) und (24) enthalten. Also bleiben (21), (22), (23) und (24) noch da.

Aus (23) haben wir

$$(32)\quad E^{kl}M_l=2k^2E^{sl}G^{hk}D_{hsl}\,.$$

Aus (24) und (32) erhalten wir

$$(33)\quad \boxed{(E^{kl}M_{kl}=)E^{kl}D^{ks}A_{sl}=2k^2E^{ks}G^{hl}D_{hskl}.}$$

Aus (22) und (32) haben wir :

$$(34)\quad \boxed{(E^{kl}D_{hk}M_l=)\ 2k^2E^{sl}D_{hk}G^{pk}D_{psl}=-E^{kl}A_{hkl}\,.}$$

(34) entspricht den Codazzi Gleichungen. Jetzt können wir schliessen :

Fundamentalsatz I der Theorie von Krümmungskugelkongruenzen. (Eine praktische Formulierung). *Wenn drei quadratische Differentialformen* $G_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$, $A_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *und* $D_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *mit den Bedingungen* (21), (33), (34), $D=0$ *und* $G\neq 0$ *gegeben sind, dann lässt sich* M_l *aus* (32) *bestimmen und wird* (15) *integrierbar, sodass eine Krümmungskugelkongruenz* $x(u^1, u^2)$ *dadurch bis auf konforme Transformationen sich eindeutig so bestimmen lässt, dass* $x(u^1, u^2)$ *die drei gegebenen Formen zu Grundformen hat.* A_{hk} *sind nach* (44) *im allgemeinen durch* G_{hk} *und* D_{hk} *allein darstellbar. Der Umnormierung*

$$(35)\quad \boxed{\mathfrak{x}^*=\omega\cdot\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{q}^*=\omega^{-1}\cdot\mathfrak{q}}$$

entsprechen dabei

$$(36)\quad \boxed{G_{hk}^*=\omega^2\cdot G_{hk}\,, \quad D_{hk}^*=\omega\cdot D_{hk}\,, \quad A_{hk}^*=A_{hk}-2k^2(\log\omega)_h(\log\omega)_k\,.}$$