134. *Sur les Systèmes des Équations Différentielles Ordinaires.*

By Masuo FUKUHARA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. Sept. 17, 1928. Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 2, 1928.)

Il s'agit de montrer, dans la suite, que quelques modifications de la méthode de Cauchy nous permettent d'obtenir des propriétés remarquables relatives à l'ensemble des courbes intégrales des équations différentielles.

Considérons, pour fixer les idées, deux équations simultanées

$$(1) \qquad y'=f(x, y, z), \qquad z'=g(x, y, z),$$

f et g étant deux fonctions continues dans le domaine D: $0\leqq x\leqq a$, $|y|\leqq b$, $|z|\leqq b$. Soit M une limite supérieure de $|f|$ et de $|g|$ dans le domaine D. Soit a' le plus petit des deux nombres $a, \frac{b}{M}$. Intercalons entre 0 et a' une suite des nombres croissants :

$$(\mathrm{I}) \qquad x_1, x_2, \dots\dots, x_{n-1}.$$

Soit L une ligne polygonale possédant les propriétés suivantes. 1) L passe par l'origine O. 2) Les sommets de L sont sur les plans $x=x_i$ $(i=1, 2, \dots\dots)$. Soient $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ces sommets, et soient μ_i, ν_i les coefficients angulaires des segments droits $\overline{P_{i-1}P_i}$. 3) μ_i est un nombre entre le maximum M_i et le minimum m_i de f dans le domaine D_i: $x_{i-1}\leqq x\leqq x_i$, $|y-y_{i-1}|\leqq M(x_i-x_{i-1})$, $|z-z_{i-1}|\leqq M(x_i-x_{i-1})$ et ν_i un nombre entre le maximum N_i et le minimum n_i de g dans le domaine D_i. L'ensemble de toutes les lignes L remplit une région de l'espace, R. Subdivisions chaque intervalle partiel de la division (I) en intervalles plus petits. On aura une région analogue, R', correspondant à la nouvelle division (I'). En continuant ainsi, on obtiendra une suite indéfinie des régions : $R, R', R'', \dots\dots$ Il est clair que l'une quelconque de ces régions est une région partielle des précédentes. Soit $\overline{R}$ l'ensemble des points appartenant à tous les $R^{(i)}$. Soient $E^{(i)}(\xi)$ les sections des $R^{(i)}$ par le plan $x=\xi$ et $\overline{E}(\xi)$ la section de $\overline{R}$ par le plan $x=\xi$, ξ étant un nombre quelconque entre 0 et a'. $\overline{E}(\xi)$ est évidemment l'ensemble limite des ensembles $E^{(i)}(\xi)$ pour i infini. On voit facilement que les ensembles $E^{(i)}(\xi)$ sont continus (c'est-à-dire fermés et bien enchaînés). Par suite, $\overline{E}(\xi)$ est aussi continu. D'autre part, en voit que la région remplie par les courbes intégrales des équations (1) passant par 0 est identique à $\bar{R}$. Ainsi nous sommes arrivés au théorème de M. Kneser.[1]

On peut aller plus loin. Soit P un point quelconque situé sur la frontière de $\bar{R}$. Je dis qu'il existe au moins une courbe intégrale passant par O et P et dont les points entre O et P sont des points frontières de $\bar{R}$. Pour démontrer ce théoréme, il est préférable d'employer les régions $T^{(i)}$ un peu différentes de $R^{(i)}$. La région T correspondant à la division (I) est celle qui est remplie par les lignes polygonales L' remplissant outre les conditions 1), 2) la condition suivante: 3') Si P_{i-1} est un point intérieur de T, μ_i et ν_i satisfont, comme précédemment, les inégalités $m_i \leqq \mu_i \leqq M_i$, $n_i \leqq \nu_i \leqq N_i$. Si P_{i-1} est un point frontière de T, on suppose que μ_i soit un nombre entre le maximum et le minimum de f dans le domaine D'_i: $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$, $|y-y_{i-1}| \leqq 3\,M(x_i-x_{i-1})$, $|z-z_{i-1}| \leqq 3\,M(x_i-x_{i-1})$, et que ν_i un nombre entre le maximum et le minimum de g dans le domaine D'_i. Soit P' un point frontière de T. Parmi les lignes L' passant par O et P', il existe au moins une telle que ses sommets situés entre O et P' soient des points frontières de T. Grâce à cette propriété, on peut établir facilement le théorème noncé ci-dessus. Remarquons enfin, que les solutions ainsi trouvées sont, dans le cas d'une équation unique, ce qu'on appelle les intégrales supérieure et inférieure.

---

1) H. Kneser, Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Lipschitzschen Bedingung nicht genügt (Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, phys.—math. Kl. 1923). Voir aussi les mémoires de M. Max Müller (Math. Zeit. Bd. 28) et de M. M. Nagumo (Japanese Journal of Mathematics, 1927).