176. *Zur Geometrie der Krümmungskugelkongruenzen.*

Von Tadahiko KUBOTA.

Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Rec. Nov. 17, 1928. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 2, 1928.)

Neuerdings hat Herr T. Takasu[1] einen grundlegenden Satz über die Überführbarkeit der beiden Krümmungskugelkongruenzen durch konforme Transformation bewiesen. Hier möchte ich dazu eine Bemerkung geben, *dass die Takasusche Bedingung wesentlich mit der Thomsenschen vollkommen übereinstimmt.* Bequemlichkeitshalber betrachten wir Laguerre-Geometrie im euklidischen Raume.

Wenn man diese Betrachtung auf den nicht-euklidischen Raum überträgt, so ist das entsprechende Problem für konforme Geometrie durch das Dualitätsprinzip zugleich gelöst. *Die beiden Takasuschen Grundformen* $\mathfrak{g}_{hk}du^h du^k$ *und* $\check{D}_{hk}du^h du^k$ *sind bis auf den Faktor* -2 *identisch, was Herrn Takasu entgangen zu sein scheint.*

Nach Blaschke ist

$$(r_1-r_2)^2(edu^2+2fdudv+gdv^2)=(r_1-r_2)^2\,\mathrm{III}$$

Laguerre-kovariant, wobei r_1, r_2 Hauptkrümmungsradien bedeuten.

Nun betrachten wir eine Schar von Krümmungskugeln der Fläche:

$$\xi=x+Xr_1, \qquad \eta=y+Yr_1, \qquad \zeta=z+Zr_1,$$

dann erhalten wir durch die Liesche Methode der isotropen Projektion die F_2

$$\xi=x+Xr_1, \qquad \eta=y+Yr_1, \qquad \zeta=z+Zr_1, \qquad \sigma=ir_1,$$

im R_4. Daraus erhält man eine Laguerre kovariante Form als Quadrat des Linienelements

$$\sum d[x+Xr_1]^2-dr_1^2=\mathrm{I}-2r_1\,\mathrm{II}+r_1^2\,\mathrm{III}, \tag{1}$$

wobei I, II, III bzw. die erste, zweite und dritte Form der Flächentheorie bedeutet. Diese Differentialform entspricht der Takasuschen $\mathfrak{g}_{hk}du^h du^k (\equiv -2\check{D}_{hk}du^h du^k)$.

---

1) T. Takasu, Zur konformen Flächentheorie mit Krümmungskugeln als Elementen I, II, Proc. **4** (1928).

2) G. Thomsen, Ueber konforme Geometrie I, Abhandl. aus dem Math. Sem. Hamburg. Univ. **3** (1924).

3) W. Blaschke, Ueber die Geometrie von Laguerre I, Abhandl. aus dem Math. Sem. Hamburg. Univ. **3** (1924).

Bildet man nun die entsprechende Form für andere Schar von Krümmungskugeln, so erhält man

$$\mathrm{I}-2r_2\,\mathrm{II}+r_2^2\,\mathrm{III}. \tag{2}$$

Addiert man (1) und (2), so erhält man die Form

$$(r_1-r_2)^2\,\mathrm{III}$$

durch Benützung der Relation

$$\mathrm{I}+r_1r_2\,\mathrm{III}-(r_1+r_2)\,\mathrm{II}=0.$$

Multipliziert man (1) und (2) so erhält man

$$-(r_1-r_2)^2\,(\mathrm{II}-r_1\,\mathrm{III})(\mathrm{II}-r_2\,\mathrm{III}),$$

der mit dem Quadrate der zweiten Blaschkeschen Fundamentalform übereinstimmt.

Wenn also

$$(r_1-r_2)^2\,\mathrm{III} \tag{3}$$

und

$$\mathrm{I}-2r_2\,\mathrm{II}+r_2^2\,\mathrm{III} \tag{4}$$

gegeben sind, so sind die drei Blaschkeschen Formen bestimmt und umgekehrt. Folglich *ist die Angabe der Formen* (3) *und* (4) *mit der der drei Blaschkeschen Formen äquivalent.*

Obwohl man beim Ausziehen der Quadratwurzel Zweideutigkeit des Vorzeichens für Blaschkesche zweite Form auftritt, braucht man es bei der Laguerreschen Transformation nicht zu bedenken, wenn man nicht die eigentlichen von den uneigentlichen unterscheidet. Nur ist die Blaschkesche Bedingung etwas präziser, da man dadurch eigentliche und uneigentliche Transformation voneinander unterscheiden kann.

Es ist nicht schwer unsere Betrachtung auf den nicht-euklidischen Raum zu übertragen, dessen Krümmung wir als 1 annehmen. Dazu betrachten wir

$$\xi_i=x_i+\frac{1}{2}X_i(\tan r_1+\tan r_2), \qquad i=1,\,2,\,3,\,4$$

$$\xi_5=\frac{i}{2}(\tan r_1+\tan r_2)$$

und können in analoger Weise verfahren. Daraus bekommt man das Resultat:

Die Angabe der Takasuschen Formen $\check{G}_{hk}du^h du^k$ *und* $\check{D}_{hk}du^h du^k$ $\left(\equiv-\frac{1}{2}\mathfrak{g}_{hk}du^h du^k\right)$ *ist mit der der Thomsenschen vollkommen äquivalent.*