

36. Über den Führer eines relativ zyklischen Zahlkörpers.¹⁾

By Shôkichi IYANAGA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. Feb. 10, 1929. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1929.)

Ist $K|k$ relativ Abelsch, so ist K ein Klassenkörper über k für eine Idealgruppe H . Den Führer von H bezeichnen wir mit f_{Kk} .

Um dies f_{Kk} zu bestimmen, genügt es bekanntlich nur solchen Fall zu behandeln, wo $K|k$ relativ zyklisch vom Primzahlpotenzgrad ist, und zwar für diesen Fall die Ordnungszahl u von f_{Kk} in I zu bestimmen.

Herr Sugawara²⁾ hat dafür folgenden Satz bewiesen:

Satz: Es sei $K|k$ relativ zyklisch vom Primzahlpotenzgrade l^h . K_v sei der in K enthaltene l^v -gradige Oberkörper von k (Also $K_0=k$, $K_h=K$), und K_t der Trägheitskörper für I ($0 \leq t < h$). Dann ist die fragliche Zahl u durch die folgende Formel gegeben:

$$(I) \quad u = \begin{cases} 1 + v_1 + \sum_{\mu=1}^{g-1} \frac{v_{\mu+1} - v_\mu}{l_\mu} & \text{für } t < h-1 \\ 1 + v_1 & \text{für } t = h-1 \end{cases}$$

wo $g=h-t$, und v_1, v_2, \dots, v_g die gewöhnliche Bedeutung für $K_{t+1}|K_t$, $K_{t+2}|K_{t+1}$, $\dots, K|K_{h-1}$ haben.

Hier will Ich einen rein arithmetischen Beweis für denselben Satz geben.³⁾

1. Es sei.

$$(1) \quad m = \Pi p \Pi I^n \Pi p_\infty m_0$$

irgendein Erklärungsmodul von H . Dann gibt es dafür einen Idealmodul

$$(2) \quad \mathfrak{M} = \Pi \mathfrak{P} \Pi \mathfrak{Q}^N m_0$$

in K , und allgemein \mathfrak{M}_v in K_v , der das Geschlecht in K_v zu erklären dient. Für die N entsprechenden Zahlen N_v gelten dann die Formeln:

1) Diese Note schliesst sich an den Arbeiten:

T. Takagi: Ueber eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers. Journal of the College of Science, Tokyo 1920.

H. Hasse: Bericht über neuere Untersuchungen etc. I. Ia. Jahresbericht d. D. M.V. 35, 36. an, die im folgenden bezw. mit T., H.I., H.I., zitiert werden. Es sei gestattet, von den dort geläufigen Bezeichnungen ohne Erklärung Gebrauch zu machen.

2) Proc., 2. 36.

3) Herr Sugawara benutzt in seinem Beweis einen in H.I. gegebenen, aus Heckesche Funktionalgleichung für L-Reihen hergeleiteten Satz. (Satz 16, H.I.S. 38)

$$\left. \begin{aligned} n &= N_1 = \dots = N_t, \\ N_{t+\mu-1} &\geq v_\mu + 1, \\ N_{t+\mu} &= 1 + v_\mu + l(N_{t+\mu-1} - 1 - v_\mu)^{1)} \end{aligned} \right\} \mu = 1, 2, \dots, g$$

sonach

$$N_{t+\mu} = \begin{cases} 1 + v_\mu + l^\mu \left\{ n - (1 + v_1 + \sum_{\kappa=1}^{\mu-1} \frac{v_{\kappa+1} - v_\kappa}{l^\kappa}) \right\}, & \mu = 2, \dots, g \\ 1 + v_1 + l \{ n - (1 + v_1) \} \end{cases}$$

2. Hilfssatz. Wir schreiben K^* statt K_{h-1} , \mathfrak{M}^* statt \mathfrak{M}_{h-1} . \mathfrak{f}_{KK^*} sei der Führer von $K | K^*$. Dann ist \mathfrak{M}^* durch \mathfrak{f}_{KK^*} teilbar.

Beweis: K ist Klassenkörper über K^* für eine Idealgruppe H^* , deren Führer \mathfrak{f}_{KK^*} ist. Diese Idealgruppe H^* lässt noch eine zweite Fassung zu: nämlich als Gruppe aller Ideale in K^* , deren Relativnormen von $K^* | k$ in H fallen.

Nach einer Eigenschaft von \mathfrak{M}^* fallen aber alle Relativnormen nach k aus dem Strahl mod. \mathfrak{M}^* in K^* in den Strahl mod. \mathfrak{m} in k .

H^* enthält hiernach den Strahl mod. \mathfrak{M}^* .

Daraus folgt die Behauptung.

3. Dem Führer \mathfrak{f}_{Kk} als bisherigem \mathfrak{m} entspreche der Idealmodul \mathfrak{f}^* in K^* . Dass dann

$$\mathfrak{f}^* | \mathfrak{f}_{KK^*}$$

ist, kann man leicht aus T. entnehmen.²⁾ Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz ist aber

$$\mathfrak{f}_{KK^*} | \mathfrak{f}^*.$$

Es ist daher

$$(II) \quad \mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}_{KK^*}.$$

4. Jetzt ist es leicht unseren Satz zu beweisen.

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Da es schon bekannt ist, dass der Satz für $h=1$ besteht, so haben wir nur den zweiten Teile der Induktion zu erbringen.

Es sei die folgende Bezeichnungen festgelegt:

- \mathfrak{l} : ein \mathfrak{l} mit $t < h-1$, also $g \geq 2^{3)}$;
- L^* : ihm entsprechendes Primideal in K^* ;

1) Dies ist nach H1a. verschärfte Gestalt der in T.S. 95 stehenden Rekursionsformel. Vgl. T.S. 92, Formel (3). H1a. S. 307. Formel (7).

2) T. Satz 29. H1a. Satz 23.

3) Die Aussage des Satzes über \mathfrak{l} mit $t=h-1$ folgt ohne weiteres aus dem Satz für $h=1$.

u : (wie vorher) die Ordnungszahl von \mathfrak{f}_{Kk} in \mathfrak{l} ;
 u^* : die Ordnungszahl von \mathfrak{f}_{K^*k} in \mathfrak{l} ;
 U^* : „ „ „ \mathfrak{f}^* „ „ L^* ;
 U_* : „ „ „ \mathfrak{f}_{Kk^*} „ „ L^* ;

Dann ist nach Induktionsannahme

$$(3) \quad u^* = \begin{cases} 1 + v_1 + \sum_{\mu=1}^{g-2} \frac{v_{\mu+1} - v_{\mu}}{l^{\mu}} & \text{für } g > 2, \\ 1 + v_1 & \text{für } g = 2, \end{cases}$$

$$(4) \quad U_* = 1 + v_g.$$

Nach § 1 ist ferner

$$U^* = \begin{cases} 1 + v_{g-1} + l^{g-1} \left\{ u - \left(1 + v_1 + \sum_{\mu=1}^{g-2} \frac{v_{\mu+1} - v_{\mu}}{l^{\mu}} \right) \right\} & \text{für } g > 2. \\ 1 + v_1 + l \{ u - (1 + v_1) \} & \text{für } g = 2. \end{cases}$$

Also nach (3)

$$(5) \quad U^* = 1 + v_{g-1} + l^{g-1} \{ u - u^* \}.$$

Nach § 3 ist aber

$$(6) \quad U_* = U^*.$$

Aus (3), (4), (5), (6) folgen der Reihe nach die Formeln:

$$1 + v_g = 1 + v_{g-1} + l^{g-1} (u - u^*),$$

$$u - u^* = \frac{v_g - v_{g-1}}{l^{g-1}},$$

$$u = 1 + v_1 + \sum_{\mu=1}^{g-1} \frac{v_{\mu+1} - v_{\mu}}{l^{\mu}}$$

Das war aber die zu beweisende Formel.

5. Aus (1), (2), (II) folgt ferner die Formel:

$$(III) \quad \mathfrak{f}_{Kk} = \prod \mathfrak{p} \prod \mathfrak{l}^u \prod \mathfrak{p}_{\infty},$$

wo u mit (I) erklärt ist, und das letzte Produkt sich auf die in K in unendlichen Primstelle 2-ten Grades zerfallenden Primstelle in K^* bezieht.

Der Führer von $K|k$ ist somit zum vollständigen Ausdruck gebracht.¹⁾

1) Die in HI. mit Hilfe der Heckesche Funktionalgleichung für L-Reihen bewiesenen Sätze 16, 17 können offenbar auch hieraus hergeleitet werden.